

## Podręczniki

1. A.K. Wróblewski, J.A. Zakrzewski - „Wstęp do fizyki”, t.1 PWN, t.2/1 PWN 1989, t.2/2 PWN
2. R. Resnick, D. Halliday - „Fizyka” t.1+2 PWN
3. C. Kittel, W.D. Knight, U.A. Ruderman - „Mechanika” PWN 1975
4. J. Orear - „Fizyka” t.1 WN-T 1990
5. A. Januszajtis - „Fizyka dla politechnik” PWN 1977
6. Sz. Szczęniowski - „Fizyka doświadczalna” PWN 1972
7. E.M. Purcell - „Elektryczność i magnetyzm”
8. J. Massalski - „Fizyka dla inżynierów”
9. B. Jaworski, A.Dietłaf - „Kurs fizyki”
10. Z. Kąkol - „Fizyka dla inżynierów” 1999

## Uzupełnienia: (materiał dodatkowy)

$$\text{delta Kroneckera: } \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 \text{ jeżeli } i = j \\ 0 \text{ jeżeli } i \neq j \end{cases}$$

$$\text{Konwencja sumowania: } \vec{a} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \hat{e}_i = a_i \hat{e}_i$$

$$\text{tensor Levi-Civity: } \varepsilon_{ijk} \begin{cases} 1 \text{ parzysta permutacja wskaźników} \\ -1 \text{ nieparzysta permutacja wskaźników} \\ 0 \text{ jeżeli wskaźniki są jednakowe} \end{cases}$$

$$\text{Iloczyn skalarny: } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i, \hat{e}_i \hat{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\text{Iloczyn wektorowy: } \vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{ijk} \hat{e}_i a_j b_k$$

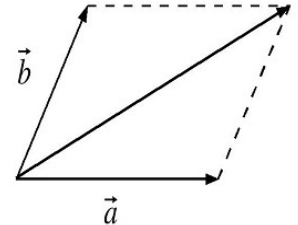
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \varepsilon_{ijk} \hat{e}_i a_j \varepsilon_{klm} \hat{e}_k b_l c_m = \underbrace{\hat{e}_i b_i}_{\vec{b}} \underbrace{a_j c_j}_{(\vec{a} \cdot \vec{c})} - \underbrace{\hat{e}_i c_i}_{\vec{c}} \underbrace{a_j b_j}_{(\vec{a} \cdot \vec{b})}$$

$$\text{czyli: } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

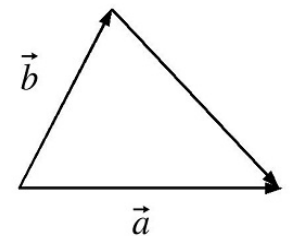
# 1. Wektory, układy odniesienia, pochodna wektora po czasie

Wektory :  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

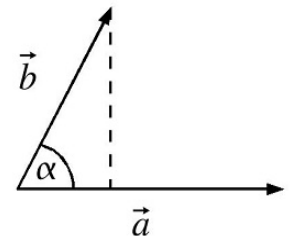
- suma:  $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$



- różnica:  $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$



- iloczyn skalarny:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \underbrace{|\vec{b}| \cos \alpha}_{b_{\parallel}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$



- iloczyn wektorowy:  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{x} (a_2 b_3 - a_3 b_2) + \hat{y} (a_3 b_1 - a_1 b_3) + \hat{z} (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha = \text{pole powierzchni}$$

- iloczyn mieszany

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{objętość równoległościanu} \\ \text{zbudowanego na wektorach } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \end{array}$$

Położenie:  $\vec{r}$

Prędkość:  $\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$

Prędkość średnia:  $\vec{v}_{\text{sr}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

Przyspieszenie:  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$

Przyspieszenie średnie:  $\vec{a}_{\text{sr}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

### Układy odniesienia:

Na płaszczyźnie:

a) kartezjański

$\vec{r} = (x, y)$  – układ ortogonalny, stały w czasie ( $\hat{x}, \hat{y}$  nie zależą od czasu)

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$$

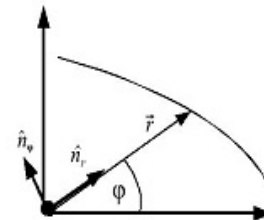
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{x} + y\hat{y}) = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} = (\dot{x}, \dot{y}) \begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \end{cases}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}) = (\ddot{x}, \ddot{y}) \begin{cases} a_x = \ddot{x} \\ a_y = \ddot{y} \end{cases}$$

b) biegunowy - prostokątny i zmienny w czasie

$$\vec{r} = r\hat{n}_r + 0\hat{n}_\varphi = (r, 0)$$

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{cases} \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \end{cases}$$



$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(r \cdot \hat{u}_r) = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\hat{u}}_r$$

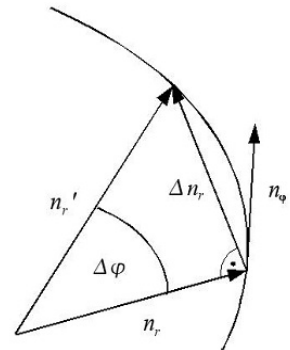
$$\dot{\hat{u}}_r = ?$$

Hodografem nazywamy krzywą zakreślona przez koniec wektora zaleznego od czasu, przy czym początek tego wektora znajduje się zawsze w tym samym punkcie.

- hodografem wektora stałego jest łuk okręgu
- pochodna wektora stałego jest prostopadła do tego wektora (styczna do okręgu jest prostopadła do jego promienia)

$$\hat{u}_r = \lim \frac{\Delta \vec{u}_r}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \hat{u}_\varphi = \dot{\varphi} \hat{u}_\varphi$$

$$\Delta u_r = \underbrace{|\hat{u}_r|}_{=1} \Delta \varphi$$



$$\vec{v} = \dot{r} \hat{u}_r + r \dot{\varphi} \hat{u}_\varphi = (\dot{r}, r \dot{\varphi})$$

$$v_r = \dot{r}, v_\varphi = r \dot{\varphi} \text{ (odpowiednik } v_l = r\omega \text{)}$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(\dot{r} \hat{u}_r + r \dot{\varphi} \hat{u}_\varphi) = \ddot{r} \hat{u}_r + \dot{r} \dot{\hat{u}}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \hat{u}_\varphi + r \ddot{\varphi} \hat{u}_\varphi + r \dot{\varphi} \dot{\hat{u}}_\varphi$$

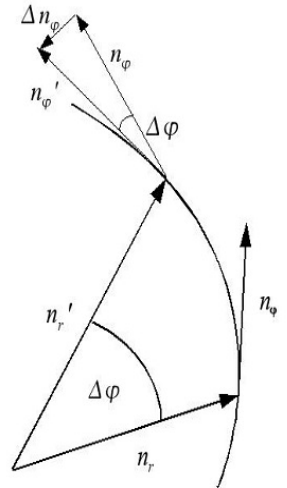
$$\hat{u}_r = \dot{\varphi} \hat{u}_\varphi \quad \Delta u_\varphi = \overbrace{|\hat{u}_\varphi|}^{=1} \Delta\varphi$$

$$\hat{u}_\varphi = \lim \frac{\Delta \vec{u}_\varphi}{\Delta t} = -\dot{\varphi} \hat{u}_r$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \ddot{r} \hat{u}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \hat{u}_\varphi + \dot{r} \dot{\varphi} \hat{u}_\varphi + r \ddot{\varphi} \hat{u}_\varphi - r \dot{\varphi}^2 \hat{u}_r = \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \hat{u}_r + (r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi}) \hat{u}_\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \text{ (składowa radialna)} \\ a_\varphi = r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi} \text{ (składowa transwersalna)} \end{cases}$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2}$$



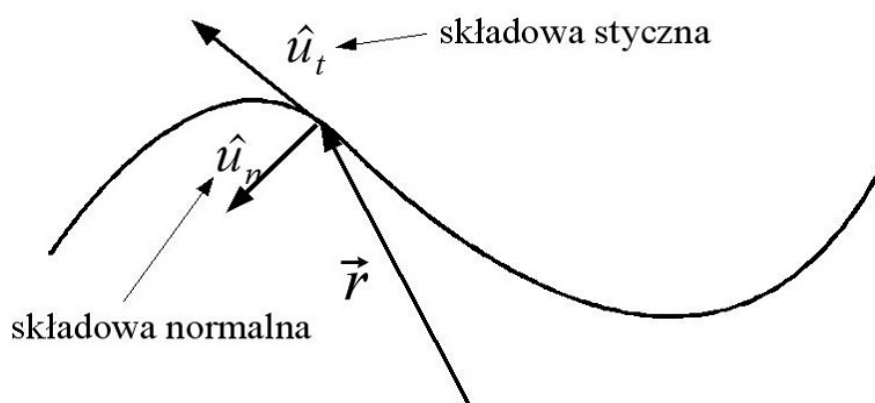
## Układy inercjalne a nieinercjalne

Układ biegunowy jest nieinercjalny i pojawiają się dodatkowe składniki przyspieszenia:

- przyspieszenie dośrodkowe  $a_d = r\omega^2$   
ogólnie:  $\vec{a}_d = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$  - w układzie wirującym z prędkością  $\vec{\omega}$
- przyspieszenie Coriolisa  $a_c = 2wv$   
ogólnie:  $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$        $\vec{a}_c \perp \vec{v}'$

### Układ styczny-normalny

Prędkość jest zawsze styczna do toru



$$\vec{v} = v\hat{u}_t + 0 \cdot \hat{u}_n = v\hat{u}_t$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}\hat{u}_t + v \underbrace{\dot{\hat{u}}_t}_{\hat{u}_n} = \dot{v}\hat{u}_t + a_n\hat{u}_n$$

$a_t = \dot{v}$  - pochodna długości wektora prędkości

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{v^2}{a_n}$$

Przykład - zadanie z biedronką  $v = at$ ,  $\varphi = ct$



## Przykłady ruchów

1. Ruch jednostajny po linii prostej  $\vec{v} = const$ ,  $\vec{a} = 0$ ,  $s = v \cdot t$

2. Ruch jednostajnie przyspieszony prostoliniowy  $\vec{a} = const$ ,

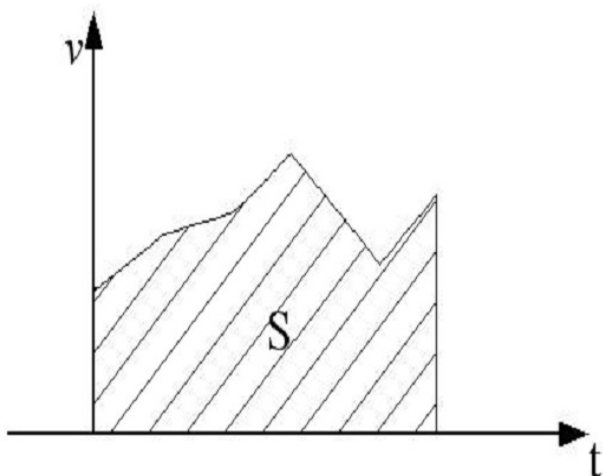
$$\frac{dv}{dt} = a \Rightarrow \int_{v_0}^v dV = \int_0^t a \cdot dt \Rightarrow v - v_0 = at \Rightarrow v = v_0 + at$$

$S$  = pole trapezu

$$S = \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2}t = v_0t + \frac{at^2}{2}$$

$$\frac{ds}{dt} = v = v_0 + at \quad \int_0^s ds = \int_0^t (v_0 + at)dt$$

3. Ruch zmienny (ogólnie)

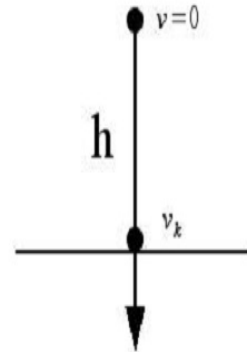


## Rzuty:

1. Swobodny spadek - ruch jednostajnie przyspieszony z przyspieszeniem  $g$

$$h = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

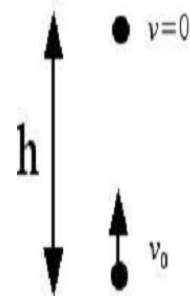
$$v_k = gt = \sqrt{2gh}$$



2. Rzut pionowy

$$v = v_0 - gt_w \Rightarrow t_w = \frac{v_0}{g}$$

$$h = v_0 t_w - \frac{gt_w^2}{2} = \frac{v_0^2}{2g}$$



3. Rzut poziomy

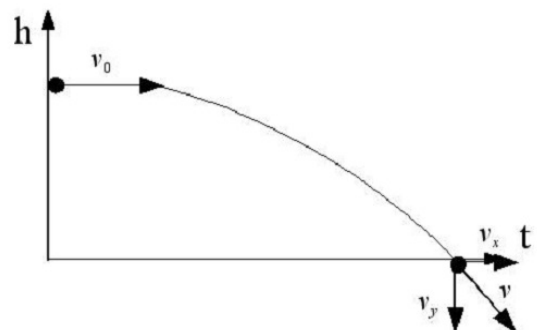
$$h = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$d = v_0 t = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v^2 = v_0^2 + v_y^2 = v_0^2 + (gt)^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2gh$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_0}$$



#### 4. Rzut ukośny

$$v_y = v_{0y} - gt_w = 0$$

$$t_w = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

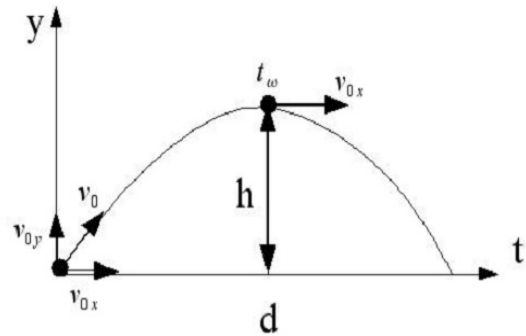
$$t_c = 2t_w$$

$$d = v_{0x} t_c = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

$$d = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

$$d(\alpha) = d(90^\circ - \alpha)$$

$$h = \frac{gt_w^2}{2} = \frac{gv_0^2 \sin^2 \alpha}{2g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$



$$\text{Równanie ruchu: } \begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \rightarrow t = \frac{x}{v_{0x}} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_{0x} \\ \frac{dy}{dt} = v_{0y} - gt \end{cases}$$

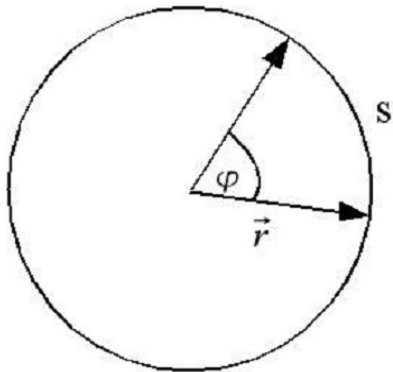
Równanie toru: (redukcja czasu)

$$y = v_{0y} \frac{x}{v_{0x}} - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_{0x}^2} \leftarrow \text{parabola}$$

$$\text{max: } \frac{dv_y}{dx} = 0 \quad \frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{gx}{v_{0x}^2} = 0 \quad \left( x = \frac{d}{2} \right)$$

$$v_{0x} v_{0y} = g \frac{d}{2} \Rightarrow d = \frac{2v_{0x} v_{0y}}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Ruch po okręgu:



$$s = r\phi \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

skalarnie:  $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\phi)}{dt} = r \frac{d\phi}{dt} = r\omega$

wektorowo:  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}}$$

$$a = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\vec{\varepsilon}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{a_d}$$

$$\vec{a}_d = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{r})}_{=0 \text{ bo } \omega \perp \vec{r}} \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{r}$$

czyli:  $\vec{a}_d = -\omega^2 \vec{r} = -\frac{v^2}{r} \hat{r}$

Ruch jednostajny po okręgu:  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

$\omega$  - częstość kołowa

$T$  - okres

$f$  - częstotliwość

Ruch jednostajnie przyspieszony:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad \omega = \omega_0 t + \varepsilon t$$

$$a_s = \varepsilon r, \quad a_d = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

## Opis ruchu w układzie obracającym się

układ S' obraca się względem S z prędkością kątową  $\vec{\omega}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} \quad \vec{r}' = x'\hat{e}_1' + y'\hat{e}_2' + z'\hat{e}_3'$$

$$\vec{v} = \frac{dx'}{dt}\hat{e}_1' + \frac{dy'}{dt}\hat{e}_2' + \frac{dz'}{dt}\hat{e}_3'$$

$\frac{d\hat{e}_1'}{dt}$  = prędkość obrotu osi  $x = \vec{\omega} \times \hat{e}_1'$  zgodnie ze wzorem ( $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ )

$$\text{Zatem: } \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \left( \underbrace{x'\hat{e}_1' + y'\hat{e}_2' + z'\hat{e}_3'}_{=\vec{r}'} \right)$$

$$\text{Czyli: } \vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Jeżeli  $\vec{v}' = 0$  (układ własny) to  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$  - ruch odbywa się po okręgu ( $r' = \text{const}$ )

Ogólnie dla układów obracających się:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + \vec{\omega} \times$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\omega} (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') = \\ &= \frac{d\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{(\vec{\omega} \cdot \vec{r}') \cdot \vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}'} = \\ &= \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \end{aligned}$$

Jeżeli  $\vec{\omega} \perp \vec{r}'$  ( płaszczyzna ruchu  $\perp$  do  $\vec{\omega}$  )

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \omega^2 \vec{r}'$$

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$  - przyspieszenie Coriolisa

$\vec{a}_d = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$  - przyspieszenie dośrodkowe

## Zasady dynamiki

Izaak Newton (1643 - 1727) sformułował trzy zasady dynamiki oraz prawo powszechnego ciążenia. Do czasów Galileusza (zmarł w 1642) wielu filozofów uważało, że do tego, aby utrzymać ciało w ruchu potrzebny jest pewien wpływ zewnętrzny, czyli siła.

1. Zasada Dynamiki: Jeżeli na ciało nie działa siła (wypadkowa) to ciało to pozostaje w spoczynku, lub porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej

2. Zasada Dynamiki: Dla ciała o stałej masie:  $\vec{F} = m\vec{a}$

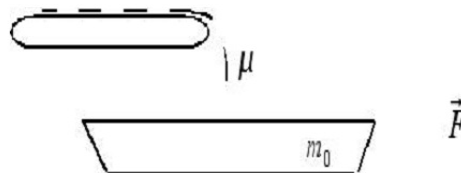
$$a = \frac{dv}{dt} \quad F = \frac{m \cdot dv}{dt} = \frac{dp}{dt}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\underbrace{\vec{F}dt}_{\text{popęd siły}} = \underbrace{d\vec{p}}_{\text{zmiana pędu}}$$

Przykład układu o zmiennej masie:

$$\mu = \frac{dm}{dt}$$



Na barkę działa stała siła  $F$

oraz sypie się piasek

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = v \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{=\mu} + m \frac{dv}{dt}$$

$$m = m_0 + \mu t$$

$$F = (m_0 + \mu t) \frac{dv}{dt} + \mu v$$

$$F - \mu v = (m_0 + \mu t) \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{F - \mu v} = \frac{dt}{m_0 + \mu t} \quad \int_0^v \frac{dv}{F - \mu v} = \int_0^t \frac{dt}{m_0 + \mu t}$$

$$-\frac{1}{\mu} \ln(F - \mu v) \Big|_0^v = \frac{1}{\mu} \ln(m_0 + \mu t) \Big|_0^t$$

$$-\ln \frac{F - \mu v}{F} = \ln \frac{m_0 + \mu t}{m_0}$$

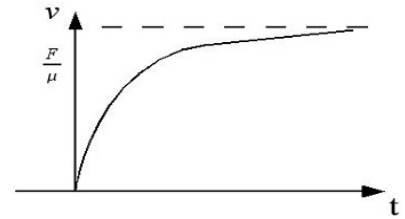
$$\frac{F}{F - \mu v} = \frac{m_0 + \mu t}{m_0}$$

$$F m_0 = F m_0 + \mu t F - m_0 \mu v - \mu^2 v t$$

$$(m_0 + \mu t)v = Ft$$

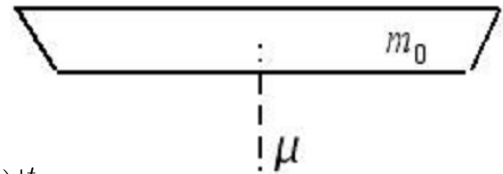


$$v = \frac{Ft}{m_0 + \mu t}$$



**Uwaga!** Inaczej rozwiązujemy zadanie, gdy barka jest dziurawa i piasek się z niej wysypuje (dlaczego? bo siła działa również na  $\mu dt$ )

$$m = m_0 - \mu t$$



$$\frac{F dt}{m - \mu t} = dv \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{F}{\mu} \ln(m_0 - \mu t) \Big|_0^t$$

Ostatecznie:  $v = \frac{F}{\mu} \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t}$   $\rightarrow$  rośnie nieograniczenie  
podobnie jest dla rakiety

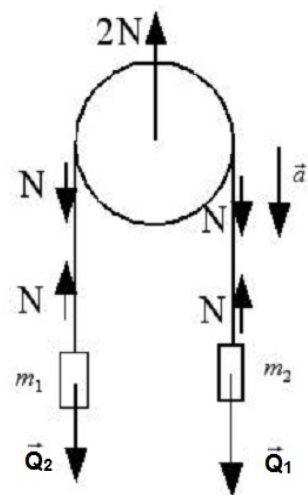
Inny przykład to rakietka - liczymy go z zasady zachowania pędu.

3. Zasada Dynamiki: Gdy dwa ciała oddziałują wzajemnie, to siła wywierana przez ciało drugie na ciało pierwsze jest równa i przeciwnie skierowana do siły, z jaką ciało pierwsze działa na ciało drugie.

Przykład: bloczek

$$\begin{cases} Q_2 - N = m_2 a \\ N - Q_1 = m_1 a \end{cases}$$

$$Q_2 - Q_1 = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g$$



$$N = m_1 a + Q_1 = \frac{-m_1^2 + m_1 m_2 + m_1^2 + m_1 m_2}{m_1 + m_2}g = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}g$$

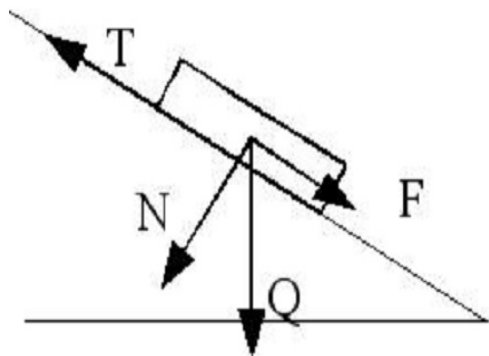
$$2N = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}g$$

Masa zredukowana:  $\mu g = 2N$

$$\mu = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Cały bloczek oddziałuje na zewnątrz tak jak masa zredukowana.

Tarcie:



(a) tarcie statyczne:  $0 \leq T \leq f_s N$

(b) tarcie kinetyczne:  $T_k = f_k N$

zwykle  $f_k \leq f_s$

Inne siły rzeczywiste:

siła grawitacji, siła Lorentza, siła sprężystości, siła naciągu.

## Siły pozorne

Założenia: układ  $S'$  porusza się względem  $S$  z przyspieszeniem  $\vec{a}_u$  oraz obraca się z prędkością  $\vec{\omega}$ .

Wtedy:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_u + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

Równanie ruchu:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{zewnętrzna}}$$

$$m[\vec{a}' + \vec{a}_u + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')] = \vec{F}_{\text{zewnętrzna}}$$

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{\text{zewnętrzna}} \quad \underbrace{-m\vec{a}_k}_{\text{siła bezwładności } \vec{F}_c} \quad \underbrace{-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{siła Coriolisa } F_{od}} \quad \underbrace{-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{siła odśrodkowa}}$$

Jeżeli dodatkowo  $\omega$  zależy od czasu, to

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{\text{zewnętrzna}} - m\vec{a}_k - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{\text{zewnętrzna}} + \vec{F}_B$$

$\vec{F}_B$  są to dodatkowe siły, które pojawiają się w nieinercyjnym układzie odniesienia.

Przykład: Punkt materialny A spoczywa w układzie inercyjnym. Jak wygląda równanie ruchu w układzie wirującym?

W układzie wirującym mamy do czynienia z ruchem po okręgu - musi zatem działać siła dośrodkowa - skąd ona się bierze?

$$\vec{v}' = -\vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (\text{znak '-' bierze się stąd, że kręci się układ})$$

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' = -2m\vec{\omega} \times (-\vec{\omega} \times \vec{r}') = 2m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$\vec{F}_{od} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$\vec{F}_\omega = \vec{F}_c - \vec{F}_{od} = 2m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

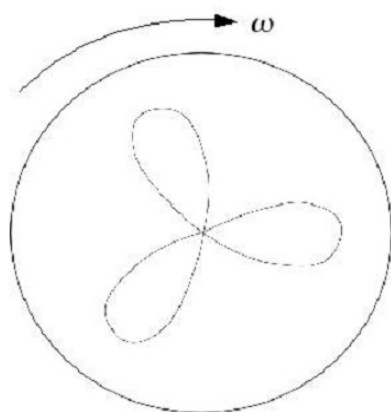
→ jest to siła dośrodkowa.

## Siła Coriolisa

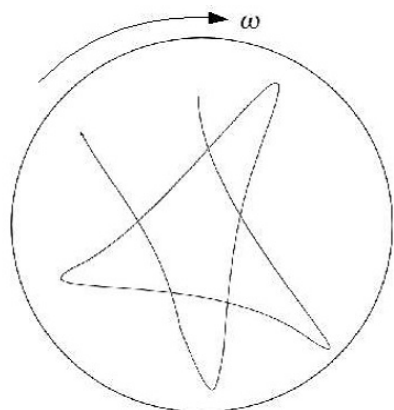
$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$$

- wahadełko na wirującej tarczy

wahadełko puszczane jest ze środka tarczy



wahadełko puszczane jest z punktu maksymalnego wychylenia



W zewnętrznym układzie nieruchomym płaszczyzna wahań zostaje zachowana

- wahadło Foucaulta

$$\omega_n = \omega \sin \varphi, \quad \omega_t = \omega \cos \varphi$$

Ruch odbywa się stycznie do powierzchni Ziemi więc:

$$F_c = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega} = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}_n$$

Wpływ ma tylko składowa  $\omega_n$

W układzie obracającym (ziemskim) występuje skrezenie płaszczyzny wahań z okresem:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\omega \sin \varphi} \approx 30 \text{ godz.} - \text{ dla Warszawy}$$

Na równiku efekt znika.

- siły Coriolisa są niewielkie:

$$\text{piechur } m = 70 \text{ kg}, v' = 6,5 \frac{\text{km}}{\text{h}} \Rightarrow F_c \sim 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ N},$$

$$\text{samochód } m = 1,5 \text{ t}, v' = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} \Rightarrow F_c \sim 5 \text{ N}.$$

Jednak na długiej drodze mogą wywołać wyraźne zboczenie np. dla rakiety średniego zasięgu przebywającej drogę 1000 km odchylenie może wynieść  $\sim 10$  km.

- charakterystyczny kierunek pasatów

- powstawanie cyklonów
- podmywanie brzegów rzek płynących południkowo
- odchylenie ciał spadających pionowo ( odpowiedzialna składowa  $\omega_t$  ); np. dla naszej szerokości geograficznej przy spadku z 100 m odchylenie wynosi ok. 1,5 cm.



# Praca, moc, energia, zasady zachowania, zderzenia

1. Praca:  $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos \alpha$

Ogólnie:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$$

- praca jako pole pod krzywą  $F(s)$
- praca dodatnia i ujemna
- składowa  $F_{\perp}$  nie wykonuje pracy (np. siła dośrodkowa)

Praca w ruchu obrotowym:

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$$

$$dW = \vec{F} \cdot (d\vec{\varphi} \times \vec{r}) = (d\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{F} = d\vec{\varphi} \cdot \underbrace{(\vec{r} \times \vec{F})}_{\text{moment siły } \vec{F}}$$

Przykłady:

(a) praca przy rozpędzaniu:  $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} d\vec{s} = \int_{t_A}^{t_B} F \vec{v} dt = \int_{t_A}^{t_B} m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} dt = m \int_{t_A}^{t_B} \vec{v} d\vec{v} =$$

$$= \frac{mv^2}{2} \Big|_{v_A}^{v_B} = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2}$$

Wyrażenie  $\frac{mv^2}{2}$  definiujemy jako energię kinetyczną

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

Wtedy:

$$W_{AB} = E_k(B) - E_k(A)$$

(b) Praca w polu grawitacyjnym (stałym)

$$W_{AB} = \int_A^B F ds = \int_{h_A}^{h_B} mg \cdot dh = mg \underbrace{(h_B - h_A)}_h = mgh$$

$$E_p = mgh - \text{energia potencjalna}$$

(c) Praca sił sprężystości:

$$F = kx$$

$$W_{AB} = \int_A^B F ds = \int_A^B F dx = \int_A^B kx dx = \frac{kx^2}{2} \Big|_{x_A}^{x_B}$$

$$W_{AB} = \frac{kx_B^2}{2} - \frac{kx_A^2}{2}$$

$$E_{ps} = \frac{kx^2}{2} \text{ - energia potencjalna sprężystości}$$

$$\text{Moc: } P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad P = \frac{\vec{M}d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{M}\vec{\omega}$$

## 2. Siły zachowawcze

### (a) Zasada zachowania energii

Jeżeli  $W_{AB}$  ( praca siły  $\vec{F}$  ) nie zależy od drogi, to siła  $\vec{F}$  jest zachowawcza.

Inaczej: praca siły zachowawczej na dowolnej drodze zamkniętej jest równa zero.

Energię potencjalną definiujemy tylko dla sił zachowawczych, a mianowicie:

$$E_p(\vec{r}) = - \int_{r_0}^r \vec{F}d\vec{r} + E_p(\vec{r}_0) = - \int_{r_0}^r \vec{F}d\vec{r} + const$$

lub

$$dE_p = -\vec{F}d\vec{r} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Odwrotnie:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

Definiujemy operator  $\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

Wtedy

$$F = -\nabla E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}, \frac{\partial E_p}{\partial y}, \frac{\partial E_p}{\partial z}\right) \equiv -\text{grad} E_p$$

Siła jest gradientem (ze znakiem '-') energii potencjalnej.

Zasada zachowania energii mechanicznej ( $E_k + E_p = \text{const}$ ) obowiązuje w polu sił zachowawczych (pole grawitacyjne, elektrostatyczne).

(b) Zasada zachowania pędu

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{Jeżeli} \quad \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec{p} = \text{const}}$$

Jeżeli na ciała nie działają siły zewnętrzne (lub wypadkowa tych sił = 0), to pęd ciał pozostaje stały.

Przykłady:

Zderzenia:

- sprężyste - obowiązuje zasada zachowania pędu i energii mechanicznej
- niesprężyste - tylko zasada zachowania pędu.

Rakieta:

chwila  $t$ :

chwila  $t + \Delta t$

$$M \cdot v = (M - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m(v - u)$$

$$M \cdot v = M \cdot v + M \cdot \Delta v - v \cdot \Delta m - \Delta m \cdot \Delta v + v \cdot \Delta m - u \cdot \Delta m$$

$$M \cdot \Delta v = u \cdot \Delta m \quad \Delta m = \mu \cdot \Delta t$$

$$M = M_0 - \mu t \quad \mu - \text{szybkość spalania}$$

$$M \Delta v = \mu \cdot u \cdot \Delta t$$

$$M \underbrace{\frac{\Delta v}{\Delta t}}_{=a} = \mu u \quad \Rightarrow \quad F_c = Ma = \mu u = \text{const}$$

Wzór Ciołkowskiego na siłę ciągu rakiety

$$(M_0 - \mu t) \frac{dv}{dt} = \mu u$$

$$\frac{dt}{M_0 - \mu t} = \frac{dv}{\mu u} \cdot u$$

$$- \int_0^t \frac{-\mu dt}{M_0 - \mu t} = \int_0^v \frac{dv}{u}$$

$$- \ln(M_0 - \mu t) \Big|_0^t = \frac{v}{u} \Big|_0^v$$

$$v = u \ln \frac{M_0}{M_0 - \mu t} = u \ln \frac{M_0}{M}$$

Układ środka masy:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\sum m_i}$$

$$\sum \vec{p}_i = \sum m_i \cdot \vec{V}_{CM} = M_C \cdot \vec{V}_{CM}$$

Cały pęd unosi układ środka masy. Zatem w układzie środka masy pęd=0

$$\sum \vec{p}_{iCM} = 0$$

### 3. Dynamika ruchu obrotowego

Moment siły:  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Moment pędu:  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  (kręt)

Szukamy:  $\frac{d\vec{L}}{dt} = ?$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

ale:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = \vec{v} \times (m\vec{v}) = 0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Jeżeli:  $\vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$

Zasada zachowania momentu pędu.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \vec{p} = m\vec{v} = m\vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

$$\vec{L} = m[\vec{\omega}(r^2) - \vec{r}(\vec{\omega}\vec{r})]$$

Dla układu ciał:  $\vec{L} = \sum m_i[\vec{\omega}r_i^2 - \vec{r}_i(\vec{r}_i\vec{\omega})]$

$$\vec{r}_i\vec{\omega} = x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z$$

Dla składowych:

$$L_x = \omega_x \underbrace{\sum m_i(r_i^2 - x_i^2)}_{I_{xx}} - \omega_y \underbrace{\sum m_i x_i y_i}_{-I_{xy}} - \omega_z \underbrace{\sum m_i x_i z_i}_{-I_{xz}}$$

Definiujemy tensor momentu bezwładności:

$$I_{xx} = \sum m(r_i^2 - x_i^2)$$

$$I_{xy} = -\sum m_i x_i y_i$$

$$I_{xz} = -\sum m_i x_i z_i$$



podobnie pozostałe składowe:  $I_{y\dots}, I_{z\dots}$

Ostatecznie:

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$

$$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$$

$$L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

Ogólnie:  $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

ze względu na symetrię:  $I_{xy} = I_{yx}$ ,  $I_{xz} = I_{zx}$ ,  $I_{yz} = I_{zy}$

Reprezentacją tensora symetrycznego jest powierzchnia drugiego stopnia (elipsoida bezwładności)

Istnieje ortogonalny układ współrzędnych (osie główne), względem którego pozostają tylko diagonalne wyrazy momentu bezwładności.

Dla ciągłego rozkładu masy:

$$I_{\alpha\beta} = \int \rho(r)(r^2 \cdot \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta) dv$$

Przykłady:

- pręt o masie  $m$  i długości  $l$  ( $\lambda = \frac{m}{l}$ ):

$$I = \int r^2 dm = \int_0^l r^2 \lambda dr = \lambda \int_0^l r^2 dr = \lambda \frac{r^3}{3} \Big|_0^l = \frac{\lambda l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$

$$I_0 = \int_{-l/2}^{l/2} r^2 \lambda dr = \lambda \frac{r^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{\lambda l^3}{24} + \frac{\lambda l^3}{24}$$

$$I_0 = \frac{ml^2}{12}$$

$$I - I_0 = \frac{ml^2}{3} - \frac{ml^2}{12} = \frac{ml^2}{4} = m \left( \frac{l}{2} \right)^2$$

Ogólnie:

$$I = I_0 + md^2 - \text{Twierdzenie Steinera}$$

- walec:

$$I_0 = \frac{mr^2}{2}$$

- obręcz:

$$I_0 = mr^2$$

- kula:

$$I_0 = \frac{2}{5}mr^2$$

- pręt:

$$I_0 = \frac{ml^2}{12}$$

Energia kinetyczna:

$$dW = Md\varphi \quad M = \frac{dL}{dt} \quad \omega = \frac{L}{I}$$

$$dW = \frac{dL}{dt}d\varphi = \frac{d\varphi}{dt}dL = \omega dL = \frac{L}{I}dL \quad \Rightarrow \quad E_k = \frac{L^2}{2I} = \frac{I\omega^2}{2}$$

Jeżeli:

$$\vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \text{czyli} \quad \underline{I\omega = \text{const}}$$

## Obrót bryły sztywnej dookoła osi swobodnej

- osią swobodną obrotu bryły sztywnej może być tylko jedna z głównych osi bezwładności, odniesionych do środka masy bryły (znikają momenty dewiacyjne, a to oznacza, że znikają momenty sił odśrodkowych powodujące zmiany kierunku osi). Bardziej stabilna jest oś odpowiadająca największemu momentowi bezwładności: (Omówić wirowanie talerza na kiju, krążki Frisbee, rzut dyskiem, łąso, hula-hop)

### Nutacje

Chwilowe zadziałanie momentem siły.

- bąk symetryczny wiruje wokół osi, która nie jest jego osią główną.

Wtedy  $\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$

Oś główna (oś symetrii) zakreśla wokół stałego momentu pędu stożek nutacji.

### Precesje

- bąk symetryczny pod działaniem zewnętrznego momentu siły.

Zatem przyrost  $d\vec{L}$  jest  $\perp$  do  $\vec{L}$

Koniec momentu pędu zakreśla precesyjne koło o promieniu  $L_{\perp} = L \sin \alpha$

Przechodzimy do układu wirującego z  $\vec{\omega}_p$ . Wówczas:

$$\frac{d}{dt} = \underbrace{\frac{d'}{dt'}}_{\text{znika bo układ własny}} + \vec{\omega}_p \times$$

czyli

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}$$

Zatem:

$$\vec{M} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}$$

$$mgr \sin \alpha = \omega_p L \sin \alpha$$

$$\omega_p = \frac{mgr}{L} = \frac{mgr}{I\omega}$$

Szybkość kątowna precesji nie zależy od kąta nachylenia bąka względem pionu.

Precesja + nutacja

wahadło żyroskopowe

Żyroskopowy moment siły ( $\vec{K}_p$ )

W układzie laboratorium  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

Po przejściu do układu własnego (precesyjnego)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega}_p \times \vec{L} + \underbrace{\frac{dL'}{dt}}_{=0 \text{ (układ własny)}}$$

czyli:

$$\underbrace{\frac{d\vec{L}}{dt}}_{\vec{M}} - \underbrace{\vec{\omega}_p \times \vec{L}}_{\vec{K}_p} = 0$$

W tym układzie wypadkowy moment siły jest równy zeru, bo  $\vec{L}$  jest stały.

Pojawia się zatem dodatkowy moment żyroskopowy:

$$K_p = -\vec{\omega}_p \times \vec{L} = \vec{L} \times \vec{\omega}_p$$

Przykłady działania momentu żyroskopowego:

- (a) skręcenie kół wagonu przy najeździe na dziurę
- (b) jazda na rowerze bez trzymania kierownicy
- (c) dociskanie kół młyńskich
- (d) kolej jednoszynowa
- (e) urządzenie żyroskopowe do stabilizacji statków

### Sztuczny horyzont

- wahadło torsyjne na wirującej tarczy. Jeżeli dobierzemy tak parametry wahadła ( $I_0 = mRs$ ;  $s$  - odległość środka ciężkości wahadła od jego osi), to

wahadło torsyjne pozostaje w spoczynku niezależnie od wielkości przyspieszenia kąowego jakiego doznaje stolik.

Ostatecznie, jeżeli weźmiemy wahadło fizyczne o okresie  $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 84$  min (odpowiada to długości zredukowanej wahadła równej promieniowi Ziemi) to zachowany jest kierunek pionu w doznającym dowolnie dużych przyspieszeń samolocie czy też pocisku raketowym.

Wahadłem takim może być wahadło żyroskopowe, dla którego

$$T = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi I\omega}{mga}$$

zależy od  $\omega$  - (prędkość kąowa żyroskopu)

### Kompas żyroskopowy

(bąk symetryczny w zawieszeniu Cardana) - stosuje się dodatkowe (pionowe) mocowanie osi 3. Żyroskop wskaże północny biegun geograficzny (a ściślej kinematyczny) Ziemi.

Poprawki (nawet kilkanaście stopni) związane z ruchem po stycznym z jego torem łuku koła wielkiego.

### Statyka bryły sztywnej

- równowaga sił i momentów sił (przykład - drabina oparta o ścianę)

## Precesja Ziemi

Ekliptyka - płaszczyzna orbity Ziemi wokół Słońca. Ekliptyka tworzy kąt  $23^{\circ}27'$  z płaszczyzną równika. Ziemia jest gigantycznym żyroskopem o osi przechodzącej od bieguna północnego do południowego. Następuje precesja tej osi względem normalnej do ekliptyki z okresem 27725 lat ( $46.79''$  na rok). Występuje również nutacja z amplitudą  $9.2''$  i okresem 19 lat.

$$\text{Ziemia: } \omega_p = 46.79'' / \text{rok} = 7.19 \cdot 10^{-12} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Spowodowana jest działaniem momentu siły od Słońca i Księżyca; Ziemia nie jest jednorodną sferą; Precesja została odkryta w 135r. p.n.e. przez Hiparchusa.



#### 4. Ruch drgający

Siła sprężystości - prawo Hooke'a:

$$\frac{F}{s} = E \frac{\delta l}{l}$$

$s$  - przekrój (pole powierzchni)

$\delta l$  - wydłużenie

$E$  - moduł Younga

często piszemy  $F = k\delta l$  - siła zewnętrzna

#### Oscylator harmoniczy

$$F = -kx$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

Rozwiązanie postaci:  $x = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$E_p = - \int_0^x F dx = \frac{kx^2}{2} \quad \leftarrow \text{parabola}$$

Z ruchem harmonicznym mamy do czynienia wtedy, gdy energia jest kwadratową funkcją wychylenia.

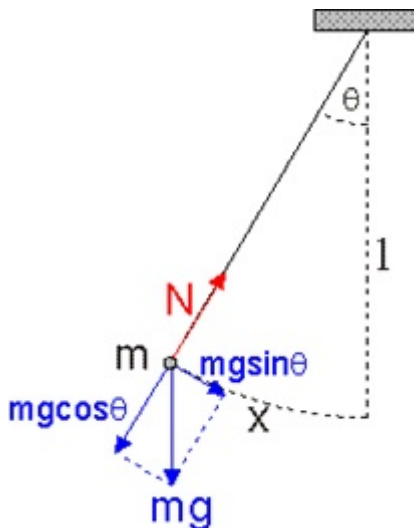
Przykłady:

- wahadło matematyczne

$$F = mg \sin \theta \approx mg \frac{x}{l}$$

$$F = - \underbrace{\frac{mg}{l}}_{=k} x$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



- wahadło fizyczne

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{Q}$$

$$M = mgd \sin \alpha \approx mgd\alpha$$

$$M = - \underbrace{mgd}_{k} \alpha \quad I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = M$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Energia całkowita:

$$E_c = E_k + E_p = \text{const.} = \frac{1}{2}kA^2$$

### Oscylator harmoniczny tłumiony

$$F_T = -bv = -b \frac{dx}{dt}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}\frac{dx}{dt}$$

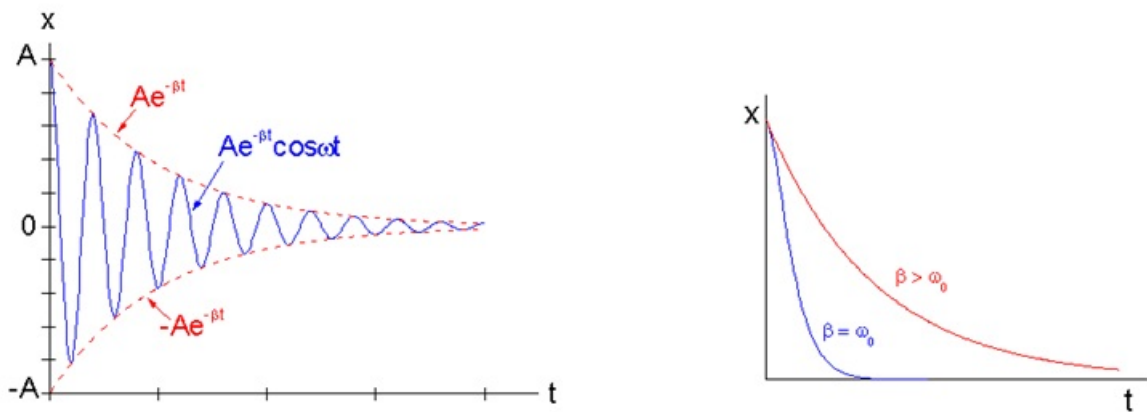
$$\frac{b}{m} \equiv 2\beta, \quad \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$

Rozwiązanie:

$$x = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$



Jeżeli  $\omega_0^2 - \beta^2 = 0$  to mamy tłumienie krytyczne, czyli brak oscylacji.

Logarytmiczny dekrement tłumienia:

$$\ln \frac{x_m(t)}{x_m(t+T)} = \beta T = \frac{2\pi\beta}{\omega}$$

Drgania wymuszone (rezonans)

Siła wymuszająca:

$$F_w = F_m \sin(\Omega t)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_m \sin(\Omega t)$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_m}{m} \sin(\Omega t)$$

$$x = A \sin(\Omega t + \delta)$$

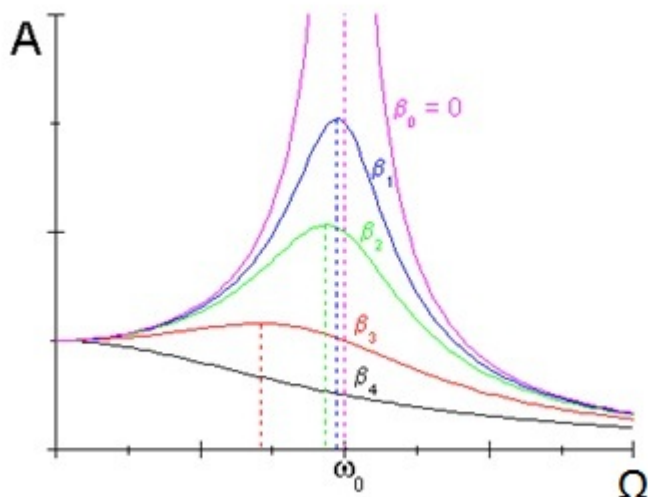
$$A = \frac{F_m}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$

$$\delta = \arctan \frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

Moc absorbowana:

$$P = \frac{1}{2} \frac{F_m^2}{m} \frac{2\beta\Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + 4\beta^2\Omega^2}$$

Jeżeli  $\Omega \rightarrow \omega_0$  to moc osiąga maksimum



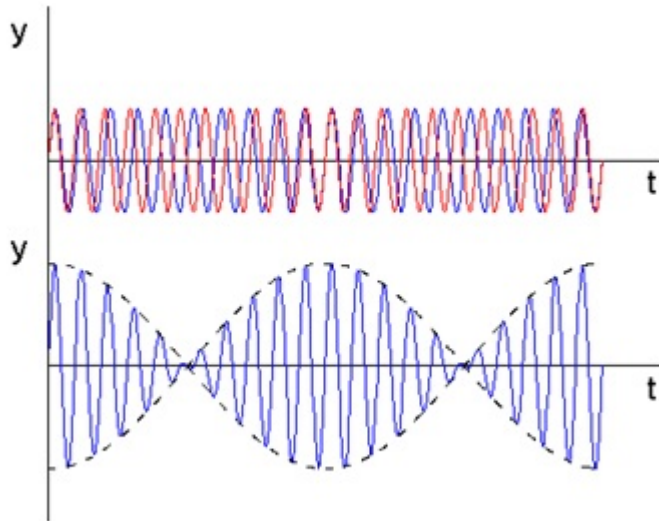
### Dudnienie

- dwa drgania składowe o zbliżonych amplitudach oraz nieco różnych częstościach:

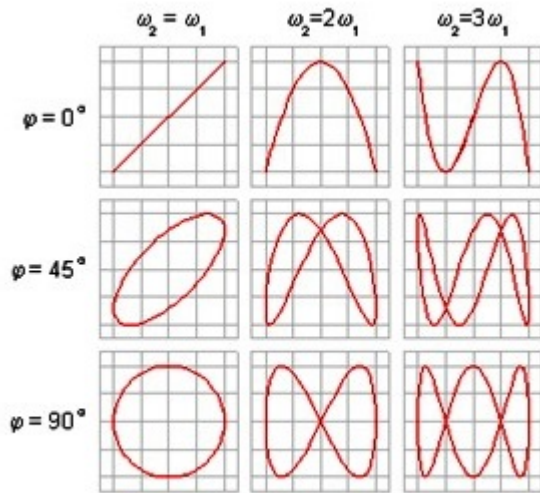
$$x = A \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t) = 2A \cos \underbrace{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t}_{\frac{1}{2}\omega_D} \cdot \cos \underbrace{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t}_{\omega'}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2}$$

$$\omega_D = \delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$



Krzywe Lissajous



$\omega_1 = \omega_2 \rightarrow$  prosta ( $\varphi = 0, \pi$ ), okrąg ( $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ), elipsa

Newton i obliczenia dla Księżyca

$$T_k = 23,32 \text{ dni} = 2,36 \cdot 10^6 s$$

$$R_{ZK} = 3,84 \cdot 10^8 m \approx 60R_z$$

Przyspieszenie dośrodkowe:

$$a_d = \omega^2 R_{ZK} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_{ZK} = 2,72 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s^2} \approx \frac{9,80}{60^2} = \frac{g}{(R_{ZK}/R_z)^2}$$

## 5. Grawitacja (siły centralne)

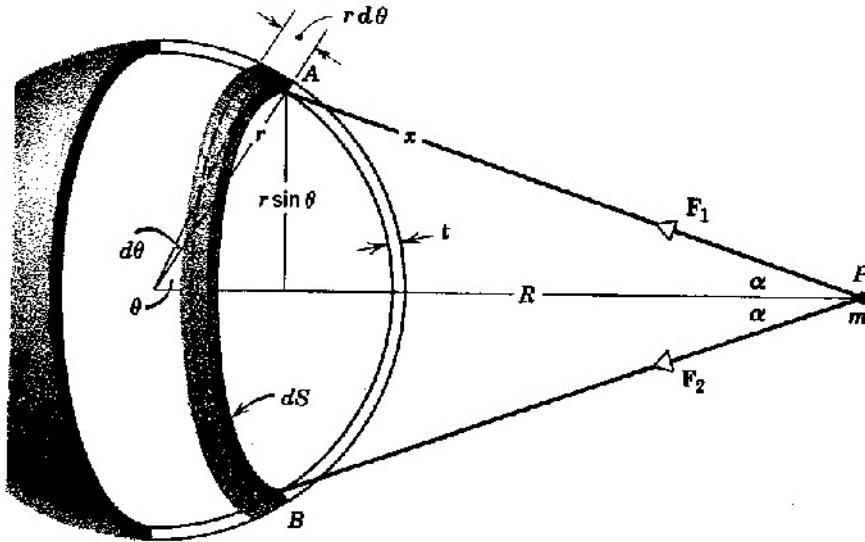
XVIIw. J.Kepler sformułował trzy prawa ruchu planet. Oparł się na bardzo dokładnych obserwacjach duńskiego astronoma Tychona Brahe (dotyczyły zwłaszcza ruchu Marsa)

Opierając się na prawach Keplera oraz "Rachunku księżycowym" Newton ogłosił w 1687r. "Philosophiae naturalis principia mathematica", gdzie podał prawo powszechnego ciążenia:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Pomiar stałej G przeprowadził po raz pierwszy Lord Cavendish w 1799r. za pomocą tzw. wagi skręceń.





Oddziaływanie powłoki sferycznej o grubości  $t$ :

$$dF = dF_1 \cdot \cos \alpha = G \frac{m \cdot dM}{x^2} \cos \alpha$$

$$dM = \rho dV = \rho 2\pi r \sin \theta r d\theta t = 2\pi t \rho r^2 \sin \theta d\theta$$

$$\cos \alpha = \frac{R - r \cos \theta}{x}$$

Z twierdzenia cosinusów:  $r \cos \theta = \frac{R^2 + r^2 - x^2}{2R}$

Po zróżniczkowaniu:

$$-r \sin \theta d\theta = -\frac{2x dx}{2R} \quad \Rightarrow \quad \sin \theta d\theta = \frac{x}{Rr} dx$$

Ostatecznie:

$$dF = \underbrace{\frac{\pi G t \rho m r}{R^2}}_{\alpha} \left( \frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1 \right) dx$$

Na zewnątrz powłoki:

$$F = \int_{R-r}^{R+r} \alpha \left( \frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1 \right) dx = \alpha \left[ \frac{R^2 - r^2}{-x} + x \right]_{R-r}^{R+r} =$$

$$= \alpha \left[ -\frac{R^2 - r^2}{R+r} + R+r + \frac{R^2 - r^2}{R-r} - R+r \right] =$$

$$= \alpha [-R+r + R+r + R+r - R+r] = 4\alpha r$$

$$F = G \frac{4\pi r^2 \rho t m}{R^2} = G \frac{Mm}{R^2}$$

Wewnątrz powłoki:

$$F = \int_{r-R}^{r+R} \alpha \left( \frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1 \right) dx = \alpha \left[ \frac{R^2 - r^2}{-x} + x \right]_{r-R}^{r+R} =$$

$$= \alpha [-R+r + R+r - R-r - r+R] = 0$$

Powłoka kulista o jnorodnej gęstości przyciąga znajdujący się na zewnątrz punkt materialny tak jakby cała masa był skoncentrowana w jej środku. Wewnątrz powłoki siła jest równa zero.

Energia potencjalna:

$$E_p = W_{\infty \rightarrow r} = \int_{\infty}^r G \frac{Mm}{r^2} dr = \left[ -G \frac{Mm}{r} \right]_{\infty}^r = -G \frac{Mm}{r}$$

$$\text{Siła: } \vec{F} = -\text{grad}E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial r} \hat{r} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}$$

Energia potencjalna jednorodnej kuli

- praca potrzebna do zbudowania kuli

$$\begin{aligned} W &= - \int_0^M \frac{Gm dm}{r} = - \int_0^r G \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho \rho 4\pi r^2}{r} dr = \\ &= - \int_0^r G \frac{16}{3} \pi^2 \rho^2 r^4 dr = -G \frac{16}{3} \pi^2 \rho^2 \frac{r^5}{5} = -\frac{3}{5} \frac{G \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right)^2}{r} \end{aligned}$$

$$W = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{r}$$

Zagadnienie dwóch ciał

$$M_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{r}$$

$$M_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2}{M_1 + M_2}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{GM_2}{r^2} \hat{r}; \quad \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \frac{GM_1}{r^2} \hat{r}$$

$$M_1 \ddot{\vec{r}}_1 + M_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0 \Rightarrow M_1 \dot{\vec{r}}_1 + M_2 \dot{\vec{r}}_2 = const \Rightarrow \dot{\vec{R}}_{CM} = const$$

Prędkość układu środka masy jest stała, czyli może być = 0

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{dt^2} = - \left( \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{r}$$

Wprowadzamy masę zredukowaną:

$$\frac{1}{\mu} \equiv \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}$$

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{r}$$

Po wprowadzeniu masy zredukowanej zagadnienie dwóch ciał sprowadza się do zagadnienia jednego ciała.

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const$$

$$\vec{l} = \vec{r} \times \mu \vec{v} = \text{const} \Rightarrow \text{ruch odbywa się w płaszczyźnie } \perp \vec{L}$$

W płaszczyźnie ruchu wprowadzamy układ biegunowy

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\varphi}\hat{u}_\varphi$$

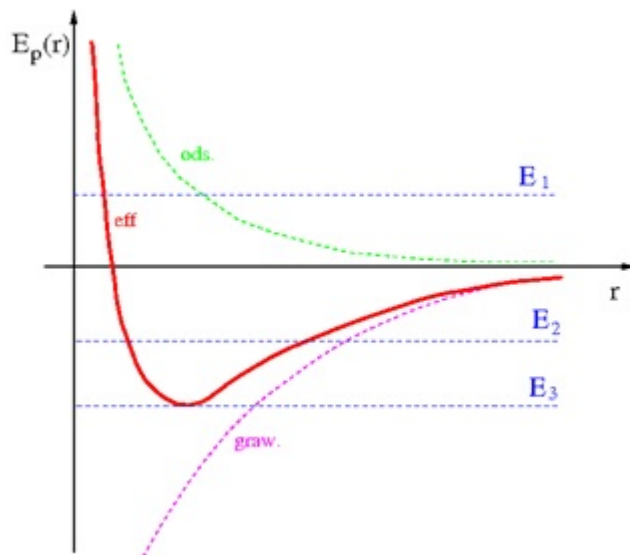
$$\vec{L} = \vec{r} \times \mu \vec{v} = \mu \vec{r} \times (\dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\varphi}\hat{u}_\varphi) = \mu r^2 \dot{\varphi} \hat{u}_z$$

$$E_k = \frac{\mu v^2}{2} = \frac{\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}{2\mu r^2} = \frac{\mu\dot{r}^2}{2} + \frac{\mu r^2 \dot{\varphi}^2}{2} =$$

$$= \frac{\mu\dot{r}^2}{2} + \frac{(\mu r^2 \dot{\varphi})^2}{2} = \frac{\mu\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

$\frac{L^2}{2\mu r^2}$  zależy tylko od  $r$  więc możemy go połączyć z energią potencjalną

$$E_{ef} = E_p + \frac{L^2}{2\mu r^2} = -\frac{GM_1 M_2}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$



Równanie ruchu:

$$\mu \ddot{r} = -\frac{GM_1 M_2}{r^2} + \underbrace{\mu \omega^2 r}_{\text{siła odśrodkowa}}$$

Rozwiązaniem tego równania są krzywe stożkowe

- $E < 0$ , (koło lub elipsa) - ruch ograniczony
- $E = 0$ , parabola
- $E > 0$ , hiperbola

Pole powierzchni:

$$\Delta \vec{S} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \Delta \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2m} \vec{r} \times \vec{p} = \frac{\vec{L}}{2m}$$

$$\vec{L} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{S}}{dt} = \text{const}$$

## Prawa Keplera

|                  |           |
|------------------|-----------|
| Mikołaj Kopernik | 1473-1543 |
| Tycho Brahe      | 1546-1601 |
| Jan Kepler       | 1571-1630 |
| Izaak Newton     | 1642-1727 |

- I. Wszystkie planety krążą po elipsach; w jednym z ognisk elipsy znajduje się Słońce
  
- II. Promień wodzący planety zakreśla w równych odstępach czasu równe pola
  
- III. Kwadraty okresów obiegu różnych planet wokół Słońca są proporcjonalne do sześciątów wielkich półosi elips

Elipsa

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{se}(1 - e \cos \varphi)$$

$s$  - określa rozmiary krzywej

$e$  - mimośród

Dla większości planet mimośród jest bardzo mały i orbity są prawie kuliste.

| Planeta | mimośród (e) |
|---------|--------------|
| Merkury | 0,205        |
| Wenus   | 0,006        |
| Ziemia  | 0,016        |
| Mars    | 0,093        |
| Jowisz  | 0,048        |
| Saturn  | 0,055        |
| Uran    | 0,046        |
| Neptun  | 0,008        |
| Pluton  | 0,246        |

Dla orbit kolistych:

$$G \frac{Mm}{r^2} = m\omega^2 r \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$
$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Ogólnie dla orbit eliptycznych otrzymujemy

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M_1 + M_2)}$$



### Twierdzenie o wiriale

Układ, w którym działają siły odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości (grawitacja, siły elektrostatyczne)

$$E_p = -\frac{C}{r} \quad \vec{F} = -\frac{C}{r^2}\hat{r} = M\vec{a}$$

$$\vec{r}\vec{F} = \underbrace{M\vec{r}\dot{\vec{v}}}_{\vec{r}M\vec{a}}$$

$$-\frac{C}{r} = E_p = M\vec{r}\dot{\vec{v}}$$

$$M\frac{d}{dt}(\vec{r}\dot{\vec{v}}) = M\dot{\vec{r}}\dot{\vec{v}} + M\vec{r}\ddot{\vec{v}} = \underbrace{Mv^2}_{2E_k} + M\vec{r}\ddot{\vec{v}}$$

$$M\frac{d}{dt}(\vec{r}\dot{\vec{v}}) = 2E_k + E_p$$

Jeżeli stan jest związany, to cząstka porusza się w skończonej objętości. Średnio biorąc, wartość  $\vec{r}\vec{v}$  równie często rośnie jak maleje. Średnia wartość lewej strony z wielu całek ruchu jest równa zero, czyli:

$$\langle 2E_k \rangle = - \langle E_p \rangle$$

Nie istnieje trwała równowaga statyczna  
(układ musi być w ruchu).

Dla cząstki związanej siłą przyciągania proporcjonalną do odwrotności kwadratu odległości, średnia energia kinetyczna jest równa połowie średniej energii potencjalnej ze znakiem minus.

Przykład - powstawanie galaktyk:

Obłok gazu traci energię poprzez promieniowanie

$E_p \searrow$  jest ujemna więc bezwzględnie rośnie

$E_k \nearrow$  co powoduje wzrost temperatury (z obłoku powstaje gorąca gwiazda)

## 6. Statyka cieczy

Ciecze czy gazy nie mają określonej postaci, przyjmują postać naczynia, w którym się znajdują

Prawo Pascala (1659r.) - ciśnienie cieczy, wywarłe w pewnym punkcie, rozkłada się równomiernie w całej objętości cieczy.

Ciśnienie

$$p = \frac{F}{S} \quad 1Pa = 1 \frac{N}{m^2}$$

pomiar ciśnienia dokonujemy np. za pomocą manometrów:

- prasa hydrauliczna

Jednostki:

$$1 \text{ bar} = 750 \text{ mmHg} = 1000 \text{ hPa}$$

$$1 \text{ Tr(tor)} = 1 \text{ mmHg}$$

$$1 \text{ atm(atmosfera fizyczna)} = 760 \text{ mmHg}$$

$$1 \text{ at(atmosfera techniczna)} = 1 \frac{kG}{m^2}$$

$$\text{Ścisłość cieczy: } B = -\frac{1}{V} \frac{d\bar{v}}{dp} \Big|_{E=const}$$

$$\text{moduł ścisłości } \beta = \frac{1}{B}$$

Ciecze są bardzo mało ścisłe. Przykłady:

- po zmieszaniu  $50\text{cm}^3$  wody i  $50\text{cm}^3$  alkoholu etylowego zyskujemy  $96\text{cm}^3$  mieszaniny. Aby fizycznie uzyskać ubytek objętości o 3,7% musielibyśmy zastosować ciśnienie  $5,4 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ . Jest to wielkość oddziaływań wzajemnych pomiędzy cząsteczkami alkoholu i wody.
- Jeśli szczelną skrzynię drewnianą (bez pokrywy) napelnioną wodą przestrzelić pociskiem karabinowym, to chwilowe wysokie ciśnienie spowoduje rozerwanie skrzyni na drzazgi
- "łezki szklane" - krople stopionego szkła krzepną w wodzie; powstają silne naprężenia, dzięki którym kropla jest odporna na uderzenie młotka. Przy odłamaniu kończących je nitek szklanych, uszkodzenie szybko rozprzestrzenia się w głąb kropli powodując gwałtowne, wybuchowe jej rozpadnięcie się na kawałki. Jeżeli zachodzi to w szklanym naczyniu wypełnionym wodą - może spowodować rozerwanie tego naczynia.

### Prawo Archimedesesa

- ciało zanurzone w płynie wypierane jest ku górze z siłą równą ciężarowi płynu wypartego przez to ciało.

Ciśnienie hydrostatyczne:  $dp = \rho g dh$

$$p_h = \rho g h$$

## 7. Dynamika cieczy

- przepływy stacjonarne: ciecz nie powstaje ani nie znika

$$Sv\rho = \text{const}$$

$S$  - pole przekroju

$v$  - prędkość przepływu cieczy

$\rho$  - gęstość cieczy

W ujęciu mikroskopowym w kierunku  $x$ :

$$V(x) = v_x \Delta y \Delta z \Delta t$$

$$V(x + \Delta x) = \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z \Delta t$$

$$\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x) = \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$$

Podobnie w pozostałych kierunkach

Oznaczenia:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \vec{v} = \text{div} \vec{v}$$

Dla cieczy idealnej  $\text{div} \vec{v} = 0$

Równanie ciągłości dla przepływu stacjonarnego cieczy ściśliwej:

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0$$

Dla przepływów niestacjonarnych:

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = S$$

gdzie

$\frac{\partial\rho}{\partial t}$  - szybkość gromadzenia się cieczy

$S$  - wpływy lub wypływy do elementu objętości

Równanie Bernoulliego (ciecz w ruchu stacjonarnym)

$$\rho gh + \frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}$$

Praca sił zewnętrznych  $p\Delta V$  zmienia się na

energię potencjalną  $mgh = \rho\Delta V gh$

i kinetyczną  $\frac{mv^2}{2} = \frac{\rho\Delta V v^2}{2}$

Ogólnie dostajemy równanie Eulera:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} - \operatorname{grad} p$$

$\vec{f}$  - siła masowa (siła zewnętrzna działająca na jednostkę masy)

Przykłady:

- rozpylacz
- pompka wodna
- palnik Bausena
- paradoks hydrodynamiczny (przyciąganie kartki)
- paradoks hydrodynamiczny (podtrzymywanie kulki w strumieniu powietrza)
- zrywanie dachów
- siła nośna działająca na skrzydło samolotu
- efekt Magnusa (wpływ lepkości cieczy powoduje unoszenie cieczy)
- Porównanie względnych wartości oporów:  
za opór odpowiedzialna jest lepkość cieczy, a przede wszystkim wiry powstające za przeszkodą

Lepkość:

Dla kuli (wzór Stokesa)

$$F_t = -6\pi\eta r v$$

$\eta$  - lepkość

Liczba Reynoldsa:

$$Re = \frac{r\rho v}{\eta}$$

Wyrażenie Newtona na siłę oporu (opór ciśnienia) - powoduje go różnica ciśnień wywołana wirami:

$$F_c = C_w \frac{\rho v^2}{2} S$$

$C_w$  - bezwymiarowy współczynnik

$\frac{\rho v^2}{2}$  - energia kinetyczna na jednostkę objętości

$S$  - powierzchnia przekroju poprzecznego

Okazuje się, że współczynnik oporu  $C_w$  jest funkcją liczby Reynoldsa oraz kształtu ciała. Dla ciał i cieczy o takiej samej liczbie Reynoldsa współczynnik oporu ma tę samą wartość. Do badań modelowych można zatem użyć ciał mniejszych, zwiększając szybkość przepływu lub zachować mniejszą prędkość przepływu, kompensując to mniejszą wartością lepkości. Jest to prawo podobieństwa hydrodynamicznego.

Dla  $Re < 1160$  stabilny jest przepływ laminarny

Dla  $Re > 1160$  stabilny jest przepływ turbulentny

Ruch laminarny - wyróżnić możemy warstwy cieczy poruszające się z różnymi szybkościami

- przepływ laminarny przez rurkę jest przepływem wirowym

Kran z wodą:

- słaby strumień; przepływ laminarny

- silny strumień; przepływ turbulentny (niespokojny)



## Cyrkulacja, wirowość lub rotacja

Cyrkulacja

$$\Gamma = \oint \vec{v} d\vec{s}$$
$$\text{rot}\vec{v} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{v} d\vec{s}}{A}$$

Jeżeli  $\text{rot}\vec{v} \neq 0$  to przepływ jest wirowy

$$\text{rot}\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Napięcie powierzchniowe

$$\lambda = \frac{F}{2l}$$

$$\lambda = \frac{\pi r^2 p}{2\pi r} = \frac{rp}{2}$$

$$p = \frac{2\lambda}{r} \quad \longleftarrow \quad \text{dla kropli}$$

(Meniski, włoskowatość)

## Termodynamika

Zasady termodynamiki:

### "0" - zerowa zasada termodynamiki

Jeżeli dwa układy znajdują się w stanie równowagi z trzecim układem, to muszą znajdować się również w stanie równowagi jeden względem drugiego.

Inaczej: Istnieje wielkość skalarna, nazywana temperaturą, która jest właściwością wszystkich układów termodynamicznych (w stanie równowagi), przy czym równość temperatur jest warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi termicznej

Termometrem nazywamy jakikolwiek mały układ (ale makroskopowy) urządzony w taki sposób, że przy pobraniu lub oddaniu ciepła przez ten układ zmienia się tylko jeden z jego parametrów makroskopowych (tzw. parametr termometryczny).

Sposoby pomiaru temperatury:

1. Rozszerzalność ciał (np. cieczy - termometry cieczowe)
2. Zmiana oporu elektrycznego (np. metale, półprzewodniki)
3. Zmiana ciśnienia lub objętości gazu (termometry gazowe)
4. Siła termoelektryczna - termopara
5. Podatność paramagnetyka

Temperatura w skali Celsjusza (krzepnięcie i wrzenie wody)

- 1954r. międzynarodowa konwencja ustaliła, że temperatura bezwzględna wody w punkcie potrójnym wynosi  $T_t = 273,16K$

$$t[^\circ C] = T[K] - 273,15^\circ$$

B.Dziunikowski: Wstęp do fizyki niskich temperatur, skrypt AGH nr1203 (1990)

Skala Fahrenheita:

$$1^\circ F = \frac{5^\circ}{9} C$$

$$-40^\circ C = -40^\circ F$$

$$100^\circ C = 212^\circ F$$

$$0^\circ C = 32^\circ F$$

I - pierwsza zasada termodynamiki

ciepło i praca są różnymi formami zmiany energii

$$\Delta U = W + Q$$

$U$  - energia wewnętrzna

$$dU = \delta W + \delta Q$$

$$W = \int F dx = \int p \underbrace{S dx}_{dV} = \int p dV$$

Konwencja:

$$\delta W = -pdV$$

$$\delta Q = mc_w dT$$

$c_w$  - ciepło właściwe

## II - druga zasada termodynamiki

Entropia charakteryzuje stan makroskopowy układu znajdującego się w równowadze.

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

Pochłanianie ciepła powoduje wzrost entropii

Dla układu izolowanego entropia rośnie  $\Delta S \geq 0$

Możemy zatem zapisać pierwszą zasadę termodynamiki:

$$dU = TdS - pdV$$

### gaz doskonały

- układ punktów materialnych oddziaływujących tylko poprzez zderzenia
- średnia energia gazu doskonałego zależy tylko do temperatury

$$\frac{U}{N} = \frac{3}{2}kT$$

k - stała Boltzmannna  $k \cong 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$

- równanie stanu gazu doskonałego

twierdzenie o wiriale

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \cdot \vec{r} \quad \Rightarrow \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

$$\text{ale: } \frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \vec{v} + \vec{r} \frac{d\vec{v}}{dt} = v^2 + \vec{r} \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\text{czyli: } \vec{r} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{v}) - v^2$$

$$\text{Ostatecznie: } m \frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{v}) = \vec{F} \cdot \vec{r} + mv^2$$

$$\frac{m}{2} \frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{v}) = \frac{\vec{F} \cdot \vec{r}}{2} + E_k$$

Średnia wartość lewej strony jest równa zero, więc:

$$\langle E_k \rangle = -\frac{1}{2} \langle \vec{F} \cdot \vec{r} \rangle$$

Zamykamy gaz w sześcianie o wymiarach  $l$

Dla trzech ścian  $\vec{F} \parallel \vec{r}$  czyli  $\vec{F} \cdot \vec{r} = 0$

Dla pozostałych trzech ścian

$$\vec{F} \cdot \vec{r} = -Fl = -(pl^2)l = -pl^3 = -pV$$

Dla całego pudła

$$\langle \vec{F} \cdot \vec{r} \rangle = -3pV$$

Ostatecznie:

$$\langle E_k \rangle = \frac{3}{2}pV$$

$$\langle E_k \rangle = U$$

$$pV = \frac{2}{3}U$$

$$U = \frac{3}{2}kTN$$

Czyli:

$$\frac{pV}{T} = nR \quad - \quad \text{równanie Clapeyrona}$$

$$n = \frac{m}{\mu} \quad \frac{pV}{T} = \frac{m}{\mu}R \quad \frac{pV}{Tm} = \frac{R}{\mu}$$

$$\frac{p}{\rho T} = \frac{R}{\mu} = \text{const}$$

## Przemiany gazowe

1. Izotermiczna ( $T = \text{const}$ )  $pV = \text{const}$  - równanie Boyle'a Maiotte'a

$$U = \text{const}$$

$$W = - \int_{V_a}^{V_b} p dV = - \int_{V_a}^{V_b} \frac{\text{const}}{V} dV = -\text{const} \ln \frac{V_b}{V_a} = nRT \ln \frac{V_a}{V_b}$$

$$W + Q = 0 \Rightarrow Q = -W$$

2. Izobaryczna ( $p = \text{const}$ )

$$\frac{V}{T} = \frac{nR}{p} = \text{const}$$

$$W = - \int_{V_a}^{V_b} p dV = -p(V_b - V_a) = p(V_a - V_b)$$

$$Q = mc_{wp}(T_b - T_a) = n \underbrace{\mu c_p}_{c_p^{mol}}(T_b - T_a)$$

$$c_p^{mol} = \mu c_p$$

3. Izochooryczna ( $V = const$ )

$$\frac{p}{T} = \frac{\mu R}{V} = const$$

$$W = 0, \quad Q = mc_v(T_b - T_a)$$

$$\Delta U = Q$$

Ogólnie:

$$mc_v dT = -pdV + mc_x dT$$

$$\text{dla } p = const : c_v = -\left. \frac{p}{m} \frac{dV}{dT} \right|_p + c_p \qquad \left. \frac{dV}{dT} \right|_p = \frac{nR}{p}$$

$$c_p = c_v + \frac{R}{\mu}$$

$$\text{lub: } c_p^{mol} = c_v^{mol} + R$$

4. Adiatyczna  $\delta Q = 0$

$$dU = \delta W \qquad mc_v dT = -pdV$$



$$m c_v dT = \frac{m R T}{\mu V} dV$$

$$\frac{\mu c_v}{R} \frac{dT}{T} = -\frac{dV}{V} \Rightarrow \frac{\mu c_v}{R} \ln T + \ln V = \text{const}$$

$$T^{\frac{\mu c_v}{R}} V = \text{const} \Rightarrow (pV)^{\frac{\mu c_v}{R}} V = \text{const}$$

$$\kappa = \frac{\mu c_v + R}{\mu c_v} = \frac{c_p^{\text{mol}}}{c_v^{\text{mol}}}$$

$$\frac{c_p}{c_v} = \kappa > 1$$

$$pV^\kappa = \text{const}$$

### Twierdzenie o ekwipartycji energii

Dla układu klasycznego, będącego w równowadze w temperaturze  $T$ , każdy wyraz niezależny we wzorze na energię zawierający kwadrat pędu lub współrzędnej ma tę samą średnią wartość równą  $\frac{1}{2}kT$

Przykłady:

1. jednoatomowy gaz doskonały:

$$E = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

$$U = \frac{3}{2}NkT \quad c_v^{mol} = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_v = \frac{3}{2}R \quad c_p^{mol} = \frac{3}{2}R + R = \frac{5}{2}R$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3} = 1,67$$

2. dwuatomowy gaz doskonały:

$$E = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2I}(l_1^2 + l_2^2)$$

$$U = \frac{5}{2}NkT \quad c_v^{mol} = \frac{5}{2}R \quad c_p^{mol} = \frac{7}{2}R \quad \kappa = \frac{7}{5} = 1,4$$

3. wieloatomowy gaz doskonały:

$$U = \frac{6}{2}NkT \quad c_v^{mol} = \frac{6}{2}R \quad c_p^{mol} = 4R \quad \kappa = \frac{4}{3} = 1,33$$

4. oscylator harmoniczny:

$$E = \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2$$

$$U = NkT$$

$$c_v^{mol} = R \quad (\text{w jednym wymiarze})$$

$$\text{dla trzech wymiarów} \quad c_v^{mol} = 3R \approx 25 \frac{J}{mol \cdot K}$$

Prawo Dulonga i Petita: w dostatecznie wysokich temperaturach, wszystkie ciała stałe mają jednakowe i niezależne od temperatury molowe ciepło właściwe wynoszące  $3R$ .

Silnik (bez chłodnicy)

$$W = Q$$

$$\Delta S = -\frac{Q}{T} < 0$$

entropia układu maleje (silnik nie istnieje)

Silnik (z chłodnicą)

$$W = Q - Q'$$

$$\Delta S_{\text{układu}} = \Delta S + \Delta S' = -\frac{Q}{T} + \frac{Q'}{T'} \geq 0$$

$$\Delta S_{\text{układu}} = -\frac{Q}{T} + \frac{Q - W}{T'} \geq 0$$

$$\frac{W}{T'} \leq \frac{Q}{T'} - \frac{Q}{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{W}{Q} \leq 1 - \frac{T'}{T} = \frac{T - T'}{T}$$

$$\eta \equiv \frac{W}{Q} \leq \frac{T - T'}{T} \text{ - sprawność}$$

Cykl Carnota (1796-1832) - dwie adiabaty i dwie izotermy

$$\eta = \frac{Q - Q'}{Q} = 1 - \frac{Q'}{Q} = 1 - \frac{T'(S - S')}{T(S - S')} = 1 - \frac{T'}{T}$$

Gaz w polu sił ciężkości

$$T = \text{const} \quad \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad dp = -\rho g dh$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{p}{p_0} \rho_0$$

$$dp = -\frac{p}{p_0} \rho_0 g dh$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g dh$$

$$\ln p - \ln p_0 = -\frac{\rho_0}{p_0} gh$$

$$p = p_0 \exp \left[ -\frac{\rho_0 g}{p_0} h \right] \text{ - wzór barometryczny}$$

### Entropia gazu doskonałego

$$\delta Q = T dS, \quad \delta W = -p dV, \quad dU = m c_v dT$$

$$dU = \delta Q + \delta W$$

$$m c_v dT = T dS - p dV \qquad \frac{p}{T} = \frac{m R}{\mu V}$$

$$dS = m c_v \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV$$

$$\Delta S = m c_v \ln T \Big|_{T_1}^{T_2} + \frac{m}{\mu} R \ln V \Big|_{V_1}^{V_2}$$

$$S_2 - S_1 = mc_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{mR}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Gazy rzeczywiste

- równanie Van der Waalsa

$$\left[ p + a \left( \frac{N}{V} \right)^2 \right] (V - Nb) = kNT$$

## Fale mechaniczne

- fale podłużne i poprzeczne
- fala harmoniczna prosta - pobudza cząstki do drgań harmonicznch prostych
- czoło fali - powierzchnia łącząca wszystkie punkty przestrzeni w których w danej chwili zaburzenia są takie same
- fala płaska - czoło fali jest płaszczyzną
- fala kulista
- fala biegnąca w prawo:  $y = f(x - \nu t)$
- fala biegnąca w lewo:  $y = f(x + \nu t)$

T - okres

$$\nu - \text{częstotliwość} = \frac{1}{T}$$

$$\lambda - \text{długość fali} = \nu T$$

$$\omega - \text{częstota kołowa} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

$$k - \text{wektor falowy, liczba falowa} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$y = f\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) = f(kx - \omega t)$$

$$\text{prędkość fazowa: } v_f = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

Ośrodki dyspersyjne: szybkość fali zależy od jej długości.

Miarą dyspersji jest  $\frac{dv_f}{d\lambda}$

Zasada superpozycji: dwie fale mogą przebiegać ten sam obszar niezależnie od siebie.

Paczka falowa: zaburzenie ograniczone w przestrzeni, można je rozłożyć na nieskończone ciągi fal, których długości zmieniają się np. w sposób ciągły.

Maksimum zaburzenia rozchodzi się z prędkością grupową:

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}; \quad v_f = \frac{\omega}{k}$$

$$v_{gr} = \frac{d}{dk}(kv_f) = v_f + k \frac{dv_f}{dk} = v_f + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dv_f}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk}$$

$$\frac{d\lambda}{dk} = \frac{d}{dk} \left( \frac{2\pi}{k} \right) = -\frac{2\pi}{k^2} = -\lambda \frac{\lambda}{2\pi}$$

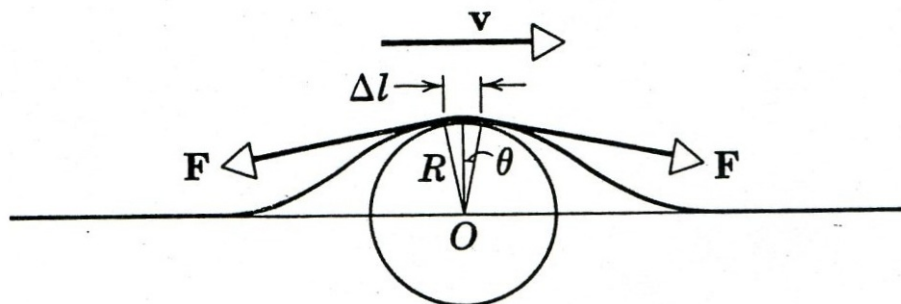
$$v_{gr} = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda}$$

W ośrodkach dyspersyjnych  $v_{gr} \neq v_f$

Paczka falowa rozmywa się w przestrzeni



## Prędkość fali



$$F_w = F_{\text{dośrodkowa}}$$

$\Delta m = \mu \Delta l$ ,  $\mu$  - gęstość liniowa  $F$  - naprężenie liny (siła naciągu)

$$2F \sin \theta = \frac{\Delta m v^2}{R}$$

$$2F \frac{\Delta l/2}{R} = \frac{\mu \Delta l v^2}{R}$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Naprężenie:

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \rho = \frac{\mu}{S}$$

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

## Równanie falowe

$$F_w = S\sigma(x + \Delta x) \sin \alpha(x + \Delta x) - S\sigma(x) \sin \alpha(x)$$

$$\sin \alpha(x) \approx \tan \alpha(x) = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\sigma(x + \Delta x) \approx \sigma(x)$$

$$F_w = S\sigma \left[ \frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x) - \frac{\partial y}{\partial x}(x) \right] = S\sigma \left[ \frac{\partial y}{\partial x}(x) + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x - \frac{\partial y}{\partial x}(x) \right] = S\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x$$

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = S\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\sigma} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

## Rozchodzenie się fal w pręcie

$\eta(x, t)$  - przemieszczenie wzdłuż osi  $x$ , jakiego doznaje środek masy odcinka pręta zawartego pomiędzy  $x$  a  $x + \Delta x$

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = S \sigma(x + \Delta x) - S \sigma(x)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x)}{\Delta x} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

Z prawa Hooke'a:  $\sigma = E \varepsilon \quad \varepsilon = \frac{\partial \eta}{\partial x}$

Ostatecznie:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

E - moduł Younga

Dla fal poprzecznych:  $v = \sqrt{\frac{\phi}{\rho}}$

$\phi$  - moduł skręcenia

Kąt ścinania:  $\gamma = \frac{1}{\phi} \sigma_t \quad \sigma_t = \phi \gamma$

Moduł sprężystości na ścinanie  $\phi$  jest zawsze mniejszy od modułu Younga E.

Szybkość fal poprzecznych jest zawsze mniejsza od szybkości fal podłużnych.

### Rozchodzenie się fal w gazie

Prawo Hooke'a:  $\frac{\Delta F}{S} = -E \frac{\Delta l}{l}$

$$\frac{\Delta F}{S} = \Delta p; \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta V}{V}$$

$$\Delta p = -E \frac{\Delta V}{V} \quad \Rightarrow \quad E = -V \frac{dp}{dV} \equiv \beta, \quad \beta - \text{moduł ściśliwości}$$

zatem:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$$

Zmiany ciśnienia są tak szybkie, że stosuje się równanie adiabaty:

$$pV^\kappa = \text{const} \quad V^\kappa dp + pV^{\kappa-1} \kappa dV = 0$$

$$\beta = -\frac{dp}{dV} V = \kappa p$$

$$v = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} \quad \frac{p}{\rho T} = \frac{R}{\mu}$$

$$v = \sqrt{\frac{\kappa RT}{\mu}}$$

W przytoczonych przykładach szybkość fal nie zależy od  $\lambda$ , czyli brak dyspersji. Dotyczy to tylko małych wychyleń. Dla dużych amplitud pojawia się dyspersja.

## Zjawisko Dopplera (odkryte w 1842r.)

1. Obserwator zbliża się do nieruchomego źródła:

$v$  - prędkość obserwatora

$u$  - prędkość dźwięku

$$t_1 = 1s$$
$$s_1 = ut_1 = \underbrace{uT}_{\lambda} \frac{t_1}{T} = \lambda\nu_0$$

Na odcinku drogi  $s_1$  znajduje się  $\nu_0$  długości fal

Na odcinku drogi  $s = vt_1 = ut_1 \frac{v}{u} = \lambda\nu_0 \frac{v}{u}$  znajduje się  $\nu \frac{v}{u}$  długości fal.

$$\lambda\nu' = s' = s + s_1 = \lambda\nu_0 \left(1 + \frac{v}{u}\right)$$

Zatem:

$$\nu' = \nu_0 + \frac{\nu_0 v}{u} = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{u}\right)$$

i częstość rośnie.

2. Obserwator oddala się od źródła:

$$\nu'' = \nu_0 - \frac{\nu_0 v}{u} = \nu_0 \left(1 - \frac{v}{u}\right)$$

i częstość maleje.

3. Źródło zbliża się do obserwatora

W chwili  $t=0$  wysyłany jest sygnał w odległości  $a$  od źródła, czyli przybędzie do obserwatora po czasie  $t_1 = \frac{a}{u}$ .

W chwili  $t = T_0$  wysyłany jest kolejny sygnał w odległości  $(a - vT_0)$ , który dotrze do obserwatora po czasie  $t_2 = \frac{a - vT_0}{u} + T_0$ .

Zatem:

$$T = t_2 - t_1 = \frac{a - vT_0}{u} + T_0 - \frac{a}{u} = T_0 \left(1 - \frac{v}{u}\right)$$

$$\nu' = \frac{1}{T} = \frac{1}{T_0 \left(1 - \frac{v}{u}\right)} = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v}{u}}$$

i częstość rośnie.

4. Źródło oddala się od obserwatora

$$t_2 = \frac{a + vT_0}{u} + T_0 \qquad T = t_2 - t_1 = T_0 \left(1 + \frac{v}{u}\right)$$

$$\nu'' = \frac{\nu_0}{1 + \frac{v}{u}}$$

### Fale stojące

- przy odbiciu fali od ośrodka gęstszego następuje zmiana fazy na przeciwną, zatem:

$$y = F(x + ut) - F(-x + ut)$$

np. dla fal harmonicznycch:

$$y = A \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} \right) \right] - A \sin \left[ 2\pi \left( -\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} \right) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= A \left\{ \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} \right) \right] - \sin \left[ 2\pi \left( -\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} \right) \right] \right\} = \\
&= 2A \sin \left( 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \cos \left( 2\pi \frac{t}{T} \right)
\end{aligned}$$

Powstaje fala stojąca o węzłach:

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = n\pi \quad \Rightarrow \quad x = n \frac{\lambda}{2} = 2l \frac{\lambda}{4}$$

Maksima powstają w punktach:

$$x = (2l + 1) \frac{\lambda}{4}$$

Fale dźwiękowe (Szczeniowski)

Zakres słyszalności ucha ludzkiego 16Hz - 20kHz

$\nu > 20\text{kHz}$  - ultradźwięki

$\nu < 16\text{Hz}$  - infradźwięki

$$v = \sqrt{\frac{\kappa RT}{\mu}}$$

dla powietrza:

$$0^\circ\text{C} - v = 331,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$20^\circ\text{C} - v = 343,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$100^\circ\text{C} - v = 387,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

próg słyszalności dla 1kHz  $- I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

Głośność:  $\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$  w decybelach

|                       | dB  |
|-----------------------|-----|
| próg słyszalności     | 0   |
| powiew liści          | 10  |
| szept                 | 20  |
| normalny ruch uliczny | 50  |
| głośna rozmowa        | 60  |
| krzyk                 | 80  |
| motocykl              | 100 |
| młot                  | 110 |
| samolot               | 120 |
| próg bólu             | 130 |



## Teoria względności

Prędkość światła - pomiar:

1. Roemer (1676r) - na podstawie obserwacji ruchu Io (najbliższego księżycy Jowisza) ocenił, że czas przebiegu światła przez średnicę orbity ziemskiej wynosi 22min, co w ówczesnych czasach prowadziło do  $c = 214300 \frac{km}{s}$ .

Io: okres orbitalny 1,77dni (odkrywca Galileusz 1610r)

2. James Bradley (1725r) - aberracja światła gwiazd. Zaobserwował pozorną zmianę położenia gwiazdy stałej (zwanej  $\gamma$ Draconius) dochodzącą do  $40,5'' = 2\alpha$

$$\tan \alpha = \frac{v_z}{c} \Rightarrow \alpha \approx 20,5''$$

3. Fizeau (1849r) - koła zębate

$$c = 315300 \pm 500 \frac{km}{s}$$

4. Foucault (1850, 1862r) - wirujące zwierciadła

$$c = 289000 \pm 500 \frac{km}{s}$$

5. Michelson (1927) - wirujące zwierciadła; odległość 35km między szczytami Mt. Wilson i Mt. San Antonio w Kalifornii

$$c = 299796 \pm 4 \frac{km}{s}$$

6. Rezonatory węgłkowe - Essen (1950r)  $c = \lambda\nu$ , dla  $\nu = 5960, 9000, 9500$  MHz:

$$c = 299792,5 \pm 1 \frac{km}{s}$$

7. Shoron - nawigacja krótkiego zasięgu - stosuje się latarnie radiowe

Aslakson:  $c = 299794,2 \pm 1,9 \frac{km}{s}$

8. Detektory światła modulowanego, stosuje się tzw. komórkę Kerr'a

$$\text{Bergstrand: } c = 299793,1 \pm 0,3 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Na podstawie setek pomiarów przyjmuje się:

$$c = (2,997925 \pm 0,000003) \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Od 1984r: } c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

1s  $\equiv$  9192631770 okresy promieniowania Cs

### Doświadczenie Michelsona-Morleya

1881r A.Michelson (fizyk amerykański polskiego pochodzenia)

- doświadczenie mające na celu wykrycie za pomocą interferometru ruchu Ziemi względem eteru

1887r - doświadczenie powtórzono z większą dokładnością przez A.Michelsona i E.W.Morleya.

Klasycznie:

$$\text{w kierunku } \parallel v_z : t_1 = \frac{L_1}{c - v_z} + \frac{L_1}{c + v_z} = \frac{2L_1c}{c^2 - v_z^2}$$

$$\text{w kierunku } \perp v_z : t_2 = \frac{s}{c} = \frac{2\sqrt{L_2^2 + x^2}}{c}$$

$$\frac{x}{\sqrt{L^2 + x^2}} = \frac{v_z}{c} \Rightarrow x = \frac{\frac{v_z}{c} L_2}{\sqrt{1 - \frac{v_z^2}{c^2}}}; \quad L_2^2 + c^2 = \frac{L_2^2}{1 - \frac{v_z^2}{c^2}}$$

Zatem:

$$t_2 = \frac{2L_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_z^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2L_1 c}{c^2 - v_z^2} - \frac{2L_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_z^2}{c^2}}}$$

Po obrocie interferometru o  $90^\circ$  ( $L_1 \longleftrightarrow L_2$ )

$$\Delta t' = t'_1 - t'_2 = \frac{2L_2 c}{c^2 - v_z^2} - \frac{2L_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_z^2}{c^2}}}$$

$$\tau = \Delta t + \Delta t' = \frac{2}{c\sqrt{1 - \frac{v_z^2}{c^2}}}(L_1 + L_2) \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_z^2}{c^2}}} - 1 \right) \approx \frac{v_z^2}{c^3}(L_1 + L_2)$$

Spowoduje to zmianę obrazu interferencyjnego (przesunięcie o  $k$  prążków)

$$k = \frac{c\tau}{\lambda} \approx \frac{v_z^2}{c^2} \frac{L_1 + L_2}{\lambda}$$

Jeżeli  $v_z = 30 \frac{km}{s}$  - obrót Ziemi wokół Słońca,  $\lambda \approx 6 \cdot 10^{-7} m$ ,  $L_1 = L_2 = 1,2 m$

to  $k \approx 0,04$  prążka - efekt bardzo mały ale możliwy do zmierzenia.

Można zwiększyć  $L$  przez wielokrotne odbicie.

Doświadczenie Michelsona-Morleya powtarzano wielokrotnie w różnych wersjach, otrzymując za każdym razem wynik negatywny. Obrót interferometru nie dawał przesunięcia prążków interferencyjnych.

Wynik doświadczenia Michelsona-Morleya był sprzeczny z tym, czego oczekiwano na podstawie transformacji Galileusza.

1905r Albert Einstein - szczególna teoria względności:

Postulaty:

1. Prędkość światła w próżni jest stała i taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia. Jest to zarazem maksymalna prędkość rozchodzenia się sygnałów w przyrodzie
2. Prawa przyrody mają jednakową postać we wszystkich inercjalnych układach odniesienia

Transformacja Lorentza (1895r)

Transformacja Galileusza - Galileo Galilei (1564-1642):

$$x' = x - vt$$

$$y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

Szukamy takiej transformacji, która spełnia postulaty Einsteina, a dla małych prędkości przechodzi w transformację Galileusza.

Z drugiego postulatu wynika, że transformacja między układami musi być transformacją liniową, tzn:  $x' = Ax + B$  i podobnie dla czasu, z tego wyprowadzenie

transformacji Lorentza (patrz Wróblewski, Zakrzewski t.1)

Tutaj nieco prościej - zakładamy:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - \alpha x) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$\gamma_1, \gamma_2, \alpha$  - dowolne parametry niezależne od  $t$  i  $x$

Równanie czoła fali:

$$x^2 + y^2 + z^2 = ct^2 \text{ - w układzie S}$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = ct'^2 \text{ - w układzie S'}$$

$$\gamma_1^2(x^2 - 2vxt + v^2t^2) + y^2 + z^2 = c^2\gamma_2^2(t^2 - 2\alpha tx + \alpha^2x^2)$$

$$x^2 \underbrace{(\gamma_1^2 - \gamma_2^2 c^2 \alpha^2)}_1 + 2xt \underbrace{[-\gamma_1^2 v + c^2 \gamma_2^2 \alpha]}_0 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \underbrace{[\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \frac{v^2}{c^2}]}_1$$

$$\begin{cases} \gamma_1^2 - \gamma_2^2 c^2 \alpha^2 = 1 \\ -\gamma_1^2 v + c^2 \gamma_2^2 \alpha = 0 \Rightarrow \gamma_1^2 = \frac{c^2 \alpha}{v} \gamma_2^2 \\ \gamma_2^2 - \gamma_1^2 \frac{v^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{c^2\alpha}{v}\gamma_2^2 - \gamma_2^2 c^2 \alpha^2 = 1 \Rightarrow \gamma_2^2 \left( \frac{c^2\alpha}{v} - c^2 \alpha^2 \right) = 1 \\ \gamma_2^2 - \gamma_2^2 \frac{c^2\alpha v^2}{v c^2} = 1 \Rightarrow \gamma_2^2 (1 - \alpha v) = 1 \end{cases}$$

$$\frac{c^2\alpha}{v} - c^2 \alpha^2 = 1 - \alpha v$$

$$-c^2 \alpha^2 + \alpha \left( \frac{c^2}{v} + v \right) - 1 = 0$$

$$\Delta = \left( \frac{c^2}{v} + v \right)^2 - 4c^2 = \frac{c^4}{v^2} + 2c^2 + v^2 - 4c^2 = \left( \frac{c^2}{v} - v \right)^2$$

$$\sqrt{\Delta} = \frac{c^2}{v} - v \quad \text{bo} \quad c > v$$

$$\alpha_1 = \frac{-\frac{c^2}{v} - v - \frac{c^2}{v} + v}{-2c^2} = \frac{1}{v}$$

$$\alpha_2 = \frac{-\frac{c^2}{v} - v + \frac{c^2}{v} - v}{-2c^2} = \frac{v}{c^2}$$

$$\gamma_2^2 = \frac{1}{1 - \alpha v} \Rightarrow \gamma_1^2(\alpha_1) = \infty \quad (\text{odpada})$$

$$\gamma_2^2(\alpha_2) = \frac{1}{1 - \frac{v}{c^2}v} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\gamma_1^2 = \frac{c^2 \alpha}{v} \gamma_2^2 = \frac{c^2 \frac{v}{c^2}}{v} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma_2^2$$

Ostatecznie:

$$\alpha = \frac{v}{c^2}, \quad \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Wprowadzamy oznaczenia:

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} > 1$$

Transformacja Lorentza:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma(x - vt) = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{array} \right.$$

Transformacja odwrotna:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \gamma(x' + \beta ct) \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right) \end{array} \right.$$

Czasoprzestrzeń  $(x, y, z, t)$

Niezmiennik czasoprzestrzeni:

$$\begin{aligned}x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 &= \gamma^2(x - \beta ct)^2 + y^2 + z^2 - c^2 \gamma^2(t - \frac{\beta}{c}x)^2 = \\&= \gamma^2 x^2 - 2\gamma^2 \beta cxt + \gamma^2(\beta ct)^2 + y^2 + z^2 - c^2 \gamma^2 t^2 + 2\gamma^2 \beta cxt - \gamma^2 \beta^2 x^2 = \\&= x^2 \underbrace{(1 - \beta^2)}_1 \gamma^2 + y^2 + z^2 - c^2 t'^2 \underbrace{\gamma^2(1 - \beta^2)}_1 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2\end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = const$$

Interwał czasoprzestrzenny:

$$S = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = S'$$

Interwał między zdarzeniami jest niezmiennikiem transformacji Lorentza

1.  $S > 0$  - interwał czasopodobny
2.  $S = 0$  - interwał zerowy
3.  $S < 0$  - interwał przestrzeniopodobny

Wykresy Minkowskiego

Dodawanie prędkości - transformacja prędkości

$$dx = \gamma dx' + \gamma \beta x dt'; \quad dt = \gamma dt' + \gamma \frac{\beta}{c} dx'; \quad dy = dy'$$



$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma dx' + \gamma \beta c dt'}{\gamma dt' + \gamma \frac{\beta}{c} dx'} = \frac{v'_x + \beta c}{1 + \frac{v'_x \beta}{c}} = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma dt' + \gamma \frac{\beta}{c} dx'} = \frac{v'_y}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Podobnie

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v_x v}{c^2}} \quad \longrightarrow \quad \left\| \frac{v_x}{c} \ll 1 \right\| \quad \longrightarrow \quad v_x - v$$

$$a'_x = \frac{dv'_x}{dt'}$$

$$dv'_x = \frac{d}{dv} \left( \frac{v_x - v}{1 - \frac{v_x v}{c^2}} \right) dv_x = \frac{1 - \frac{v_x v}{c^2} - (v_x - v) \left( -\frac{v}{c^2} \right)}{\left(1 - \frac{v_x v}{c^2}\right)^2} dv_x =$$

$$= \frac{1 - \frac{v_x v}{c^2} + \frac{v_x v}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v_x v}{c^2}\right)^2} dv_x = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v_x v}{c^2}\right)^2} dv_x = \frac{dv_x}{\gamma^2 \left(1 - \frac{v_x v}{c^2}\right)^2}$$

$$a'_x = \frac{dv_x}{\gamma^2 \left(1 - \frac{v_x v}{c^2}\right)^2} \frac{1}{\gamma dt - \frac{\beta}{c} \gamma dx} = \frac{a_x}{\gamma^3 \left(1 - \frac{v_x v}{c^2}\right)^3}$$

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3 \left(1 + \frac{v'_x v}{c^2}\right)^3}$$

Jeżeli układ własny ( $v'_x = 0$ )  $\Rightarrow a_x = \frac{a'_x}{\gamma^2}$

Jeżeli  $v \rightarrow c \Rightarrow \gamma \rightarrow \infty \Rightarrow a_x \rightarrow 0$

### Skrócenie Lorentza-Fitzgeralda

- na czym polega pomiar długości?
- w układzie własnym:  $L_0 = x'_2(t'_2) - x'_1(t'_1)$   
 $t'_1$  może być różne od  $t'_2$
- w układzie poruszającym się

$$L = x_2(t_2) - x_1(t_1) \quad \text{ale} \quad t_2 = t_1 = t$$

$$L_0 = x'_2(t'_2) - x'_1(t'_1) = \gamma(x_2 - \beta ct_2) - \gamma(x_1 - \beta ct_1) = \gamma(x_2 - x_1) - \underbrace{\gamma\beta c(t_2 - t_1)}_0 = \gamma L$$

$$L_1 = \frac{L_0}{\gamma_1} \quad i \quad L_2 = \frac{L_0}{\gamma_2} \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

Wymiary ciał w kierunku ruchu ulegają relatywistycznemu skróceniu. Każdy obserwator uzna poruszający się względem niego obiekt za krótszy.

### Dylatacja czasu

S' - układ własny;

załóżmy, że  $x' = 0$ , a  $t' = \tau$ ,

wtedy:

$$t = \gamma(t' + \frac{\beta}{c}x') = \gamma\tau$$

$$t = \gamma\tau \text{ gdzie } \tau - \text{ czas własny}$$

W układzie poruszającym się względem układu własnego czas wydłuża się (płynie wolniej).

Przykład: czas rozpadu cząstek poruszających się rośnie, paradoks bliźniąt.

Zjawisko Dopplera

1. Pierwszy sygnał wysłany jest w czasie  $t'_1 = 0$  ( $x' = 0$ )

$$\text{co daje } t_1 = 0, x_1 = 0$$

2. Drugi sygnał  $t'_2 = T_0$  ( $x' = 0$ )

$$t_2 = \gamma(t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_2) = \gamma T_0$$

$$x_2 = \gamma(x'_2 + vt'_2) = \gamma v T_0$$

W układzie S sygnał potrzebuje czasu  $\Delta t = \frac{x_2}{c}$  na pokonanie drogi  $x_2$

$$T = t_2 + \Delta t = \gamma T_0 + \frac{\gamma v T_0}{c} = \gamma T_0(1 + \frac{v}{c}) =$$

$$= T_0 \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = T_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} = T_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}; \quad \lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

## Transformacja kąta (dla wiązki promieniowania)

$$\cos \alpha' = \frac{x'}{ct'}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{ct}$$

$$\cos \alpha = \frac{\gamma(x' + vt')}{c\gamma(t' + \frac{v}{c^2}x')} = \frac{\frac{x'}{ct'} + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \frac{x'}{ct'}} = \frac{\cos \alpha' + \beta}{1 + \beta \cos \alpha'}$$

Jeżeli  $\beta \rightarrow 1 \Rightarrow \cos \alpha \rightarrow \frac{\cos \alpha' + 1}{1 + \cos \alpha'} = 1 \Rightarrow \alpha \rightarrow 0$

Następuje zwięzanie kąta emisji promieniowania

## Dynamika relatywistyczna

### Pęd

W układzie poruszającym się zmieni się składowa y-kowa wektora prędkości

$$v'_y = \frac{v_y}{1 - \frac{v_x v}{c^2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

i pęd klasyczny prostopadły do ruchu zależy od prędkości. Klasyczny pęd nie będzie zachowany w zderzeniach.

Lepiej oprzeć się na wielkościach związanych z układem własnym. Wtedy:

$$\frac{\Delta y}{\Delta \tau} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta \tau}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta \tau} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \gamma = v_y \gamma$$

Tak więc lepiej oprzeć się na definicji pędu w postaci:

$$\vec{p} \equiv \frac{m\vec{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = mc\beta\gamma = m(v)\vec{v}$$

Wprowadzamy pojęcie masy spoczynkowej i masy relatywistycznej:

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \Rightarrow \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1 / \cdot m_0^2 c^4$$

$$m_0^2 c^4 \gamma^2 - m_0^2 c^4 \beta^2 \gamma^2 = m_0 c^4$$

Ostatecznie:

$$m^2 c^4 - p^2 c^2 = m_0 c^4$$

Dla małych prędkości:

$$mc^2 = m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \dots\right) = \underbrace{m_0 c^2}_{\text{energia spoczynkowa}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_0 v^2}_{E_k}$$

$$E \equiv mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

## Transformacja siły

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Składowa tangencjalna siły:  $F_T = \frac{dp}{dt}$

$$\begin{aligned} F_T &= \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{m_0 \frac{dv}{dt} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + m_0 v \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \\ &= \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{dv}{dt} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} a_T \end{aligned}$$

Składowa normalna:  $F_N$ :

wektor prędkości zostaje skrecony, ale jego długość pozostaje bez zmian, dlatego mianownik ma stałą wartość, czyli:

$$F_N = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} a_N$$

Zatem:

$$\vec{F} \neq m\vec{a}$$

Uwaga:

Dla dużych prędkości znacznie trudniej przyspieszać cząstkę niż ją zakrzywić.

np:

| $\frac{v}{c}$ | $\frac{F_T}{m_c a_T}$ | $\frac{F_N}{m_0 a_N}$ |
|---------------|-----------------------|-----------------------|
| 0,01          | 1,00015               | 1,00005               |
| 0,40          | 1,29892               | 1,09109               |
| 0,90          | 12,07451              | 2,29416               |
| 0,99          | 356,22171             | 7,08881               |

### Transformacje siły z układu własnego S'

w S' ciało spoczywa, czyli  $E' = m_0 c^2 = const$

$$p_x = \gamma \left( p'_x + \frac{\beta E'}{c} \right) \Rightarrow dp_x = \gamma dp'_x$$

$$dt = \gamma dt', \quad dp_y = dp'_y, \quad dp_z = dp'_z$$

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} = \frac{\gamma dp'_x}{\gamma dt'} = \frac{dp'_x}{dt'} = F'_x$$

podobnie

$$F_y = \frac{1}{\gamma} F'_y; \quad F_z = \frac{1}{\gamma} F'_z$$

Transformacja między dowolnymi układami jest nieco bardziej skomplikowana.

## Energia kinetyczna

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dt} dx$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 \frac{dv}{dt}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

$$W = \int_0^t \frac{m_0 \frac{dv}{dt} \cdot v dt}{\gamma^3} = m_0 \int_0^v \frac{v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} dv = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = E_k$$