Potrenuj obliczanie całek nieoznaczonych:	odpowiedzi:
1. $\int e^{ax+b}\,dx$	$\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$
2. $\int \dfrac{dx}{a+bx}\,dx$	$\frac{1}{b}\ln\lvert a+bx\rvert+C$
3. $\int (a+bx)^2\,dx$	$\dfrac{(a+bx)^3}{3b}+C$
4. $\int \dfrac{2x-1}{x^2-x+5}\,dx$	$\ln\lvert x^2-x+5\rvert+C$
5. $\int \sin(ax+b)\,dx$	$-\frac{\cos(x^2+1)}{a}+C$
6. $\int x\sin(x^2+1)\,dx$	$\frac{1}{2}\cos(x^2+1)+C$
7. $\int \cos^2 x\,dx$	$\frac{1}{4}\sin 2x+x+C$
8. $\int \sqrt{1-x}\,dx$	$-\dfrac{2}{3(1-x)\sqrt{1-x}}+C$

przykładowo ad 3): podstawienie $y=a+bx$, dalej różniczka z obu stron: $dy=d(a+bx)$, $dy=b\,dx$, czyli $\int(a+bx)^2\,dx=\dfrac{1}{b}\int y^2\,dy=\dfrac{1}{3b}y^3=\dfrac{1}{3b}(a+bx)^3$

ad 4): podstawienie $y=x^2-x+5$, $\quad dy=d(x^2-x+5)=(2x-1)\,dx \quad\rightarrow\quad \int\dfrac{dy}{y}=...$ itd.

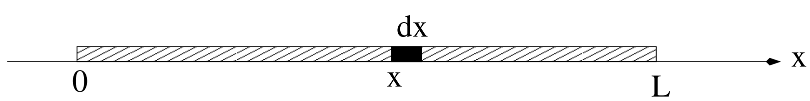
ad 5) podstawienie $y=ax+b$, ad 6) podstawienie $y=x^2+1$,

ad) 7) przekształć funkcję podcałkową używając tożsamości $\cos 2x=2\cos^2 x-1$: $\int\cos^2 x\,dx=\int\dfrac{\cos 2x+1}{2}\,dx=...$

ad 8) podstawienie $y=1-x$

Zastosowania całek oznaczonych:

1. Oblicz masę b. cienkiego niejednorodnego pręta o długości L. Gęstość liniowa[1] λ zmienia się następująco w funkcji odległości x od początku pręta: $\lambda(x)=\lambda_o(1-\frac{x^2}{L^2})$. Oblicz dla $\lambda_o=0.2$ kg/m, $L=1$ m.



Rozwiązanie:

Nie możemy obliczać całej masy mnożąc długość pręta L przez gęstość λ (bo gęstość się zmienia! pręt jest niejednorodny). Natomiast możemy w punkcie odległym o x od początku pręta uzyskać masę b. małego fragmentu pręta o długości dx (dx to różniczka, nieskończenie mała wielkość, na tej długości dx zmiana gęstości jest nieistotna). Ta masa (też nieskończenie mała) wynosi $dm=\lambda dx$. Mając te masy dm dla wszystkich x-ów możemy je zsumować i to będzie szukana cała masa m. A to sumowanie jest całkowaniem:

$$m=\int dm=\int_0^L\lambda(x)\,dx=\int_0^L\lambda_o(1-\frac{x^2}{L^2})\,dx=...=\frac{2}{3}\lambda_o L=0.133\text{ kg}.$$

Gdyby pręt był jednorodny, o gęstości liniowej wszędzie takiej samej, równej λ_o, miałby wtedy masę 0.2 kg.

[1] gęstość liniową definiujemy jako iloraz masy dm odcinka pręta o długości dx do wielkości tego odcinka dx, $\lambda=\frac{dm}{dx}$ (czyli inaczej - przez pochodną). Dla pręta jednorodnego będzie to po prostu $\lambda=\frac{m}{L}$, jednostką gęstości liniowej jest kg/m. Podobnie możemy mówić o gęstości powierzchniowej $\sigma=\frac{dm}{dS}$ kg/m^2, i gęstości objętościowej $\rho=\frac{dm}{dV}$ kg/m^3.

2. Silnik pewnej rakiety działa tak, że ilość paliwa zużywanego w jednostce czasu jest proporcjonalna do masy paliwa m aktualnie znajdującego się w zbiorniku w danej chwili.
1) Na podstawie powyższego opisu słownego ułóż równanie, które rządzi zmianą masy w zbiorniku $m(t)$.

Odpowiedź: wyrażenie $-\frac{dm(t)}{dt}$ określa ile w chwili t ubywa paliwa w jednostce czasu, ten ubytek jest proporcjonalny do aktualnej masy w zbiorniku $m(t)$, czyli:

$-\frac{dm(t)}{dt} = k \cdot m(t)$, ($k$ - stała > od zera). Jest to równanie na nieznaną funkcję $m(t)$.

2) Oblicz po jakim czasie t_1 masa paliwa w zbiorniku spadnie do $\frac{1}{3}$ masy początkowej m_o.

Aby to zrobić trzeba znać funkcję $m(t)$, czyli należy rozwiązać podane równanie.

Rozwiązanie:

W równaniu $-\frac{dm(t)}{dt} = k \cdot m(t)$ nieznana funkcja $m(t)$ występuje pod znakiem pochodnej, ale też jest po drugiej stronie równania, dlatego przed całkowaniem równania należy rozseparować zmienne:

$\frac{dm}{m} = -k\,dt$, a następnie scałkować obustronnie:

$\int_{m_o}^{m} \frac{dm}{m} = -\int_0^t k\,dt \quad \to \quad \ln m\Big|_0^m = -kt\Big|_0^t \quad \to \quad \frac{m}{m_0} = e^{-kt} \quad \to \quad m(t) = m_0 e^{-kt}$.

Mając rozwiązanie, nietrudno pokazać, że $t_1 = \frac{\ln 3}{k}$.

3. Niejednorodna kula. Obliczyć masę kuli o promieniu R i gęstości objętościowej zmieniającej się następująco: $\rho(r) = \rho_o\,(1 + \alpha r)$, gdzie r jest odległością od środka kuli a ρ_o i α są stałymi dodatnimi.
Mamy do czynienia z symetrią sferyczną: gęstość w ustalonej odległości r (czyli na sferze o promieniu r) jest wszędzie taka sama, niezależnie od kierunku. Dlatego jako objętość elementarną dV wygodnie jest obrać obszar ograniczony sferami o promieniach r i $r + dr$, ta objętość jest równa $dV = 4\pi r^2 dr$ (powierzchnia sfery $4\pi r^2$ razy jej grubość dr). Masa tej objętości jest równa $dm = \rho(r)dV$, a całkowita masa

$$m = \int_m dm = \int_V \rho(r)dV = \int_0^R \rho_o\,(1 + \alpha r) 4\pi r^2 dr.$$

$$\text{Całkowanie :} \quad m = 4\pi\rho_o \int_0^R r^2\,dr + 4\pi\rho_o\alpha \int_0^R r^3\,dr = \ \ldots \quad \text{dokończ}$$