• Dynamika. Całkowanie równań ruchu; • II zasada Newtona przy użyciu pędu; • Praca w polu sił; • Moc; • Energia kinetyczna, energia potencjalna; • Zasada zachowania energii

1. Proszę przyswoić sobie wiadomości dotyczące całkowania z "abc..." *calkowanie.pdf*, rozdz.1-3 i przykłady z rozdz.5.

2. Ciało porusza się w cieczy o dużej lepkości. W takiej sytuacji jego prędkość zmienia się następująco: $v(t) = Ae^{-bt}$, gdzie $A = 5$ cm/s, $b = 0.2$ 1/s. Oblicz drogę jaką przebędzie w pierwszych pięciu sekundach ruchu. (wskaz.: $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$). Odp: 15.8 cm

3. Ruch prostoliniowy, niejednostajnie opóźniony jak w zad.4 zest.5, z prędkością $v(t) = 9-6t^2$ [m/s]; położenie początkowe $x_o = 3$ m. Oblicz przebytą drogę s oraz przemieszczenie d w przedziale czasu: a) pomiędzy $t_1 = 0.5$ s i $t_2 = 1$ s, b) pomiędzy $t_1 = 0.5$ s i $t_2 = 3$ s. (wskaz: całkowanie $v(t)$; uwzględnij, że po określonym czasie poruszająca się cząstka zawraca).
Odp.: ad a) droga = przemieszczenie = 2.75 m, ad b) droga = 37.45 m, przemieszczenie = −31.25 m

4. Wracamy do zad.7 pkt.b (zestaw 3). Proszę prześledzić rozwiązanie:
   Równanie ruchu (z II zas. dynamiki): $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv$. Należy go rozwiązać, czyli znaleźć v. Szukaną niewiadomą w tym równaniu jest funkcja $v(t)$, która występuje w dwóch miejscach: pod znakiem pochodnej i w liniowym wyrażeniu po prawej stronie. To kłopot, bo żadne przekształcenia algebraiczne nie pozwolą na znalezienie v, konieczne jest zastosowanie operacji odwrotnej do różniczkowania, czyli całkowanie, wtedy uda się wyłuskać v spod znaku pochodnej.

   Jednak zastosowanie obustronnego całkowania po czasie t równania na tym etapie jest przedwczesne i nie da pozytywnego rezultatu, popatrz:
   $$m\int_0^t \frac{dv}{dt}dt = mg\int_0^t dt - k\int_0^t v(t)dt.$$
   Całki $\int_0^t v(t)dt$ nie da się policzyć, bo przecież funkcja $v(t)$ nie jast znana.

   W takim przypadku należy wcześniej dokonać **separacji zmiennych**, tzn. doprowadzić do tego aby lewa strona równania zależała tylko od jednej zmiennej (np. od v), a nie byłoby tam zmiennej t, a prawa strona zawierała drugą zmienną, czyli t, a nie zawierała v.

   Mnożymy obustronnie równanie wyjściowe przez dt, a następnie dzielimy przez $(mg - kv)$.

   Rezulat: $\dfrac{mdv}{mg-kv} = dt$. Teraz już można obustronnie całkować (lewa strona - zmienna całkowania v, prawa - t).

   $L:\ \int_0^v \frac{dv}{g-\frac{k}{m}v} = ... = -\frac{m}{k}\ln(g-\frac{k}{m}v)|_0^v = -\frac{m}{k}\ln\frac{g-\frac{k}{m}v}{g}, \qquad P:\ \int_0^t dt = t|_0^t = t.$

   Zwróć uwagę na granice całkowania: dowolnej chwili t odpowiada wartość prędkości $v(t)$, a chwili $t = 0$ wartość $v_o = 0$, co wynika z założenia że ruch jest bez prędkości początkowej.

   Po całkowaniu równanie ma postać: $-\frac{m}{k}\ln(1-\frac{k}{mg}v) = t$ i nie ma już w nim pochodnej! Teraz wystarczy go przekształcić algebraicznie aby otrzymać szukany wynik:
   $$... \quad\rightarrow\quad \ln(1-\frac{k}{mg}v) = -\frac{k}{m}t \quad\rightarrow\quad 1-\frac{k}{mg}v = e^{-\frac{k}{m}t} \quad\rightarrow\quad \boxed{v = v(t) = \frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})}.$$
   Gdy $t \to \infty$ prędkość v dąży do wartości $\frac{mg}{k}$, którą to wielkość nazywamy prędkością graniczną v_{gr}.

   Narysuj wykres funkcji $v(t)$!!

   Przykład.

   Oblicz z jaką prędkością będzie się poruszał skoczek spadochronowy o masie 80 kg w końcowej fazie ruchu blisko Ziemi po wyskoczeniu z dużej wysokości, jeśli współczynnik oporu w powietrzu wynosi $k = 16$ kg/s.

5. 1. Sformułuj słownie i matematycznie definicję pracy w polu sił.
   2. Jak się oblicza pracę gdy: a) siła jest stała i droga przesunięcia prostoliniowa, b) w dowolnym przypadku (zmienna siła, droga dowolna) ?
   3. Przesuwamy ciało po osi x od punktu $x = 2$ m do $x = 3$ m działając siłą zmienną $F(x) = 2 + 0.5x^2$ N. Oblicz pracę wykonaną przez F. Zinterpretuj tę pracę graficznie na podstawie wykresu F w funkcji x. O ile wzrosła energia kinetyczna ciała?

6. *Praca stałej siły na drodze prostoliniowej.*
   Człowiek pcha ciężar o masie 30 kg po poziomej podłodze, siła skierowaną w dół pod kątem 45^o do poziomu, przesuwając go ze stałą (!) prędkością na odległość 10 m. Jaką prącę wykonał on, jeśli współczynnik tarcia wynosi 0.2? Odp. 7.36 kJ

7. Obliczyć pracę jaką wykonamy rozciągając sprężynę (powoli, aby równoważyć w każdym momencie siłę sprężystości równą $F = -kx$, x – odległość od położenia równowagi) o 10 cm od położenia równowagi. Współczynnik sprężystości $k = 350$ N/m. Jaką pracę wykona siła sprężystości? Jaką energię potencjalną uzyska sprężyna? (wskaz.: Siła jest zmienna, więc należy całkować)

8. Które z następujących sił są siłami zachowawczymi, a które niezachowawczymi: siły w ruchu harmonicznym prostym, siły tarcia, siły grawitacyjne, siły kulombowskie. Jak to sprawdzic? Czy dla pola niezachowawczego można określić energię potencjalną? Uzasadnić.

9. Z powierzchni ziemi wyrzucono pionowo w górę ciało z prędkością $v = 10\ m/s$. Na wysokości $h = 3\ m$ energia potencjalna tego ciała wynosiła $E = 15\ J$. Ile wynosiła na tej wysokości jego energia kinetyczna? (wskaz.: stosuj zasadę zachowania energii)