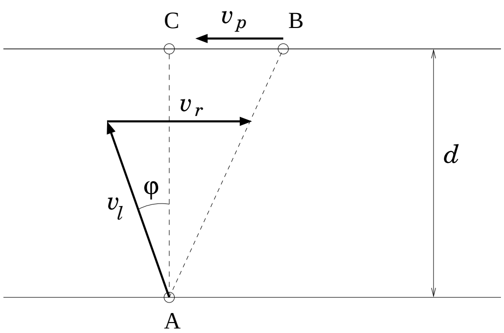
Przeprawa przez rzekę.
Chcesz dostać się w możliwie najkrótszym czasie do punktu położonego na przeciwległym brzegu rzeki, mającej szerokość 500 m, dokładnie na wprost miejsca, w którym aktualnie stoisz. Prędkość nurtu rzeki wynosi 2 km/h. Masz do wyboru kombinację płyniecia łodzią z prędkością (na nieruchomej wodzie) równą 3 km/h, a następnie marszu wzdłuż brzegu z prędkością 5 km/h. a) Pod jakim kątem α względem nurtu rzeki skierujesz łódź aby czas był minimalny? b) Ile czasu zajmie ci wtedy przebycie całej drogi?

Rozwiązanie

OZNACZENIA.
Oznaczmy: szerokość rzeki $d = 0.5$ km, prędkość nurtu $v_r = 2$ km/h, prędkość łódki $v_l = 3$ km/h, prędkość piechura $v_p = 5$ km/h, kąt φ – kąt pomiędzy kierunkiem łódki a linią prostopadłą do nurtu rzeki.
Punktami A, B, C oznaczamy kolejno miejsce startu, punkt po drugiej stronie rzeki do którego przybiła łódka, punkt docelowy przeprawy.

ANALIZA OGÓLNA.
Zanalizujmy problem dla różnej kombinacji v_r, v_l, v_p.



Na czas całkowity składa się czas przepływania łódką rzeki t_1 oraz czas ewentualnego powrotu brzegiem t_2 z miejsca, do którego łódka przybiła do brzegu

$$t = t_1 + t_2. \tag{1}$$

Ten pierwszy czas wynosi

$$t_1(\varphi) = \frac{d}{v_l \cos\varphi}. \tag{2}$$

Drugi składnik zależy od drogi BC do przebycia piechotą wzdłuż brzegu, która wynosi

$$x = (v_r - v_l \sin\varphi)\, t_1 = \frac{d}{v_l \cos\varphi}(v_r - v_l \sin\varphi). \tag{3}$$

Przyjmijmy za dodatni kierunek osi x kierunek prądu i zauważmy, że x może być dodatnie lub nie. Te dwie możliwości oznaczmy odpowiednio jako *przypadek 1*, gdy $x > 0$ i *przypadek 2*, dla $x \leqslant 0$. Oczywistym jest, że ujemne x, czyli wylądowanie łódki na lewo od punktu docelowego C nie jest sytuacją o którą chodzi w zadaniu. W każdym takim przypadku czas płynięcia będzie dłuższy niż czas, który osiągnie się kierując łódkę tak aby wylądować wprost w punkcie C ($x = 0$), czyli wybierając dla osiągnięcia minimalnego czasu przeprawy kąt φ zgodnie z warunkiem

$$\sin\varphi_m = \frac{v_r}{v_l}, \tag{4}$$

należy tylko określić dla jakiej kombinacji prędkości mamy do czynienia z taką sytuacją. Rozpatrzmy najpierw sytuację przeciwną, dla której $x > 0$.
Przypadek 1) Jak widać z (3) ma to miejsce wtedy gdy

$$\sin\varphi < \frac{v_r}{v_l}. \tag{5}$$

Wtedy czas t_2 przebycia drogi BC jest równy

$$t_2 = \frac{x}{v_p}, \tag{6}$$

tak, że czas całkowity wynosi

$$t(\varphi) = \frac{d}{v_l v_p \cos\varphi}(v_p + v_r - v_l \sin\varphi). \tag{7}$$

Powyższa funkcja osiąga minimum (przyrównaj pochodną do zera) dla kąta φ_m spełniającego zależność

$$\sin\varphi_m = \frac{v_l}{v_p + v_r}, \tag{8}$$

przy czym, uwzględniając warunek (5), musi być spełniona nierówność

$$\frac{v_l}{v_p + v_r} < \frac{v_r}{v_l}, \quad \text{czyli} \quad v_l^2 < (v_p + v_r)v_r. \tag{9}$$

Ta relacja określa sytuację, w której łódka ląduje na drugim brzegu na prawo od punktu C i ostatnią część drogi przebywa się piechotą z prędkością v_p. Szukany kąt określony jest wzorem (8), a minimalny czas przeprawy uzyskujemy wstawiając (8) do 7):

$$t_m = \frac{d}{v_l v_p}\sqrt{(v_p + v_r)^2 - v_l^2}. \tag{10}$$

Przypadek 2. Jeśli spełniony jest warunek przeciwny do (9) to szukane rozwiązanie dla minimalnego czasu uzyskujemy dla $x = 0$, czyli przy kącie określonym przez równość (4). Czas minimalny wynosi wtedy

$$t_m = t_1(\varphi_m) = \frac{d}{\sqrt{v_l^2 - v_r^2}} \tag{11}$$

i oczywiście nie zależy od v_p.

Zreasumujmy rezultaty:

1) *Przypadek:* $v_l^2 < (v_p + v_r)v_r$.

$$\sin\varphi_m = \frac{v_l}{v_p + v_r}, \quad t_m = \frac{d}{v_l v_p}\sqrt{(v_p + v_r)^2 - v_l^2}. \tag{12}$$

2) *Przypadek:* $v_l^2 > (v_p + v_r)v_r$.

$$\sin\varphi_m = \frac{v_r}{v_l}, \quad t_m = t_1(\varphi_m) = \frac{d}{\sqrt{v_l^2 - v_r^2}}. \tag{13}$$

3) *Przypadek:* $v_l^2 = (v_p + v_r)v_r$ *(przypadek graniczny obu poprzednich).*

$$\sin\varphi_m = \sqrt{\frac{v_r}{v_p + v_r}}, \quad t_m = \frac{d}{\sqrt{v_p v_r}}. \tag{14}$$

OBLICZENIA.
Dane w zadaniu spełniają kryteria przypadku 1, wstawiając je do wzorów (12) uzyskujemy odpowiedzi liczbowe:

kąt skierowania łodzi względem nurtu rzeki $\alpha = \varphi_m + \pi/2 = 115.4^o$,
minimalny czas przeprawy $t_m = 12.6$ minut.