WSTĘP DO TEORII LICZB – ZADANIA

Liczby Fibonacciego

Zad.1 Wykaż następujące tożsamości

$$\begin{aligned} F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} &= F_{2n}, \\ F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} &= F_{2n+1} - 1, \\ F_1 - F_2 + F_3 \ldots + (-1)^n F_n &= (-1)^{n+1} F_{n-1} + 1. \end{aligned}$$

Zad.2 Wykaż, że dwie kolejne liczby Fibonacciego muszą być względnie pierwsze.

Zad.3 (trudne, por. [Knuth])Wykaż, że $NWD(F_n, F_m) = F_d$, gdzie $d = (m, n)$.

Zad.4 W oparciu o powyższe twierdzenie wykaż

$$\begin{array}{lccc} \text{(a)} & 2 \mid F_n & \Leftrightarrow & 3 \mid n, \\ \text{(b)} & 3 \mid F_n & \Leftrightarrow & 4 \mid n \\ \text{(c)} & 4 \mid F_n & \Leftrightarrow & 6 \mid n \\ \text{(d)} & 5 \mid F_n & \Leftrightarrow & 5 \mid n \end{array}$$

Zad.5

$$\text{udowodnij:}\quad {F_1}^2 + {F_2}^2 + {F_3}^2 + \ldots + {F_n}^2 = F_n F_{n+1}.$$

Zad.6 Oblicz (wyraź przez Φ) $\cos 36°$ i $\cos 72°$ (por. [Knuth]).

Zad.7 Zweryfikuj tożsamość (por. [Knuth])

$$2^{n-1} F_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k+1} 5^k.$$

Zad.8 W oparciu o funkcję tworzącą liczb Fibonacciego oblicz (por. [Knuth])

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} F_n^2 z^n = \quad \ldots \quad &= \frac{1}{5}\left[\frac{2-3z}{1-3z+z^2} - \frac{2}{1+z}\right], \\ \sum_{n=1}^{\infty} F_n^3 z^n = \quad \ldots \quad &= \frac{1}{5}\left[\frac{2z}{1-4z-z^2} - \frac{3z}{1+z+z^2}\right]. \end{aligned}$$