21. 02. 2007

Podstawy informatyki kwantowej
Zestaw 1
ćwiczenia 11. 03. 2010
grupy IS

1.1. Co to jest operator? Podać przykład.

1.2. Policzyć kwadraty operatorów:

a. $\hat{A} = \frac{d}{dx} + \hat{x}$,

b. $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$,

c. $\hat{\mathbf{P}} = -i\hbar\nabla + \mathbf{A}(\mathbf{r})$.

1.3. Policzyć komutatory $[\hat{A}, \hat{B}]$, gdy

a. $\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2}$, $\hat{B} = \hat{x}$,

b. $\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2}$, $\hat{B} = \frac{d^2}{dx^2}$,

c. $\hat{A} = \nabla^2$, $\hat{B} = \hat{x}$,

d. $\hat{A} = \nabla^2$, $\hat{B} = \hat{\mathbf{r}}$,

e. $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x}$, $\hat{B} = \frac{\partial}{\partial y}$.

1.4. W zbiorze funkcji jednej zmiennej $\psi(x)$, gdzie $x \in (-\infty, \infty)$, całkowalnych z kwadratem można określić iloczyn skalarny w postaci całki:

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \psi^*(x)\phi(x).$$

Unormować funkcję

$$\phi(x) = Ce^{-\alpha x^2}.$$

1.5. Wartością oczekiwaną operatora $\hat{A}$ w stanie $|\phi\rangle$ nazywamy następującą biliniową formę funkcji $\phi(x)$:

$$\langle A\rangle_\phi = \frac{\langle\phi|\hat{A}|\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \phi^*(x)\hat{A}\phi(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx\ |\phi(x)|^2}.$$

Policzyć wartości oczekiwane operatorów:

a. $\hat{A} = \hat{x}$,

b. $\hat{B} = \frac{d}{dx}$,

c. $\hat{C} = \frac{d^2}{dx^2}$,

d. $\hat{D} = \frac{d}{dx} + x$,

w stanie reprezentowanym przez funkcję $\phi(x)$ z poprzedniego zadania.
Czy funkcja $\phi(x)$ jest funkcją własną któregoś z operatorów?

1.6. Znaleźć operatory sprzężone po hermitowsku do:

a. x,

b. $\frac{d}{dx}$,

Który z nich jest hermitowski?

Pożyteczne całki:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$,

2. $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^{2n} e^{-\alpha x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n} e^{-\alpha x^2} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n} (\frac{\pi}{\alpha})^{1/2}$.

lub ogólniej

$$\int_0^\infty dx\ x^n e^{-\alpha x^2} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2a^{\frac{n+1}{2}}} = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}\alpha^k}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, & \text{dla } n = 2k, \\ \frac{k!}{2a^{k+1}}, & \text{dla } n = 2k+1. \end{cases}$$

przy czym $\alpha > 0$, $n > -1$.