

Podstawy informatyki kwantowej
Zestaw 2
ćwiczenia 21. 03. 2011
grupy IS

2.1. Niech $|u_i\rangle$, $|u_j\rangle$ oraz $|u_k\rangle$ stanowią bazę ortonormalną w trójwymiarowej przestrzeni wektorowej nad ciałem liczb zespolonych.

Oblicz $\langle\phi|\phi\rangle$, $\langle\psi|\psi\rangle$ oraz $\langle\phi|\psi\rangle$, gdy wektory stanu mają postać

$$|\psi\rangle = 2i|u_i\rangle - |u_j\rangle + 4|u_k\rangle, \quad |\phi\rangle = |u_i\rangle + 3i|u_j\rangle - |u_k\rangle,$$

a następnie sprawdzić czy spełniona jest nierówność Schwartz'a.

$$|\langle\phi|\psi\rangle|^2 \leq \langle\phi|\phi\rangle\langle\psi|\psi\rangle.$$

2.2. Operator $\hat{\mathbf{A}}$ działający w trójwymiarowej przestrzeni wektorowej nad ciałem liczb zespolonych ma postać

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 3+2i & 3i \\ -i & 3i & 8 \\ 1-i & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

natomiast wektory stanu dane są wyrażeniami:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} -1+i \\ 3 \\ 2+3i \end{pmatrix}, \quad \langle\phi| = \begin{pmatrix} 6 & -i & 5 \end{pmatrix}.$$

- a. Oblicz $\hat{\mathbf{A}}|\psi\rangle$, $\langle\phi|\hat{\mathbf{A}}$ oraz $|\psi\rangle\langle\phi|$.
- b. Znajdź sprzężenie zespolone, transpozycję oraz sprzężenie hermitowskie dla wielkości $\hat{\mathbf{A}}$, $|\psi\rangle$ oraz $\langle\phi|$.

2.3. Z elementów $|u_i\rangle$, $|u_j\rangle$ oraz $|u_k\rangle$, które stanowią bazę ortonormalną w trójwymiarowej przestrzeni zespolonej utworzono następujące wyrażenia

$$|\phi_1\rangle = |u_i\rangle + i|u_k\rangle, \quad |\phi_2\rangle = |u_j\rangle - |u_k\rangle.$$

Niech $\hat{\mathbf{B}}$ jest operatorem liniowym, którego reprezentacja macierzowa w bazie $\{|u_n\rangle\}$ ma postać

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 2i & 3 \\ -2i & 0 & 1+i \\ 3 & 1-i & -2 \end{bmatrix}.$$

Wykaż, że operator $\hat{\mathbf{B}}$ jest hermitowski w oparciu o wyrażenia:
 $\langle\phi_1|\hat{\mathbf{B}}|\phi_1\rangle = i\langle\phi_2|\hat{\mathbf{B}}|\phi_2\rangle.$

Jaką interpretację można nadać tym wyrażeniom?

- 2.4.** Niech elementy $|u_i\rangle$, $|u_j\rangle$ oraz $|u_k\rangle$, stanowią bazę ortonormalną w przestrzeni liniowej $\mathcal{V}(\mathbb{C})$ i niech \hat{C} jest operatorem liniowym działającym w tej przestrzeni takim, że:

$$\hat{C}|u_i\rangle = 2|u_i\rangle, \quad \hat{C}|u_j\rangle = 3|u_i\rangle - i|u_k\rangle, \quad \hat{C}|u_k\rangle = -|u_j\rangle.$$

Znajdź reprezentację macierzową tego operatora w bazie $\{|u_n\rangle\}$.

- 2.5.** Niech $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots$ oraz energie E_1, E_2, \dots są odpowiednio stanami własnymi i wartościami własnymi hamiltonianu \hat{H} . Oblicz wartość oczekiwaną $\langle H \rangle_\psi$ w stanie $|\psi\rangle$, jeżeli liniowa kombinacja

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1} a_i |\phi_i\rangle$$

nie jest stanem własnym hamiltonianu \hat{H} .