12. 11. 2012

Podstawy informatyki kwantowej
Zestaw 2
—
grupa IS

2.1. Niech $| \, u_i >$, $| \, u_j >$ oraz $| \, u_k >$ stanowią bazę ortonormalną w trójwymiarowej przestrzeni wektorowej nad ciałem liczb zespolonych.
Oblicz $< \phi|\phi >$, $< \psi|\psi >$ oraz $< \phi|\psi >$, gdy *wektory stanu* mają postać

$$| \, \psi >= 2i| \, u_i > -| \, u_j > +4| \, u_k >, \quad | \, \phi >= | \, u_i > +3i| \, u_j > -| \, u_k >,$$

a następnie sprawdzić czy spełniona jest nierówność Schwartza.

$$| < \phi|\psi > |^2 \quad \leq \; < \phi|\phi >< \psi|\psi > .$$

2.2. Operator $\hat{\mathbf{A}}$ działający w trójwymiarowej przestrzeni wektorowej nad ciałem liczb zespolonych ma postać

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 3+2i & 3i \\ -i & 3i & 8 \\ 1-i & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

natomiast wektory stanu dane są wyrażeniami:

$$|\psi >= \begin{pmatrix} -1+i \\ 3 \\ 2+3i \end{pmatrix}, \qquad < \phi| = \begin{pmatrix} 6 & -i & 5 \end{pmatrix}.$$

a. Oblicz $\hat{\mathbf{A}}|\psi >$, $< \phi|\hat{\mathbf{A}}$ oraz $|\psi >< \phi|$.

b. Znajdź sprzeżenie zespolone, transpozycję oraz sprzężenie hermitowskie dla wielkości $\hat{\mathbf{A}}$, $|\psi >$ oraz $< \phi|$.

2.3. Z elementów $| \, u_i >$, $| \, u_j >$ oraz $| \, u_k >$, które stanowią bazę ortonormalną w trójwymiarowej przestrzeni zespolonej utworzono następujęce wyrażenia

$$| \, \phi_1 >= | \, u_i > +i| \, u_k >, \quad | \, \phi_2 >= | \, u_j > -| \, u_k > .$$

Niech $\hat{\mathbf{B}}$ jest operatorem liniowym, którego reprezentacja macierzowa w bazie $\{| \, u_n >\}$ ma postać

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 2i & 3 \\ -2i & 0 & 1+i \\ 3 & 1-i & -2 \end{bmatrix}.$$

Oblicz wartości oczekiwane $< \phi_1|\hat{\mathbf{B}}|\phi_1 >$ oraz $< \phi_2|\hat{\mathbf{B}}|\phi_2 >$.

2.4. Niech elementy $\mid u_i >$, $\mid u_j >$ oraz $\mid u_k >$, stanowią bazę ortonormalną w przestrzeni liniowej $\mathcal{V}(\mathbb{C})$ i niech $\hat{\mathbf{C}}$ jest operatorem liniowym działającym w tej przetrzeni takim, że:

$$\hat{\mathbf{C}}\mid u_i >= 2\mid u_i >, \quad \hat{\mathbf{C}}\mid u_j >= 3\mid u_i > -i\mid u_k >, \quad \hat{\mathbf{C}}\mid u_k >= -\mid u_j > .$$

Znajdź reprezentację macierzową tego operatora w bazie $\{\mid u_n >\}$.

2.5. Niech $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \ldots$ oraz energie $E_1, E_2, \ldots$ są odpowiednio stanami własnymi i wartościami własnymi hamiltonianu $\hat{\mathbf{H}}$. Oblicz wartość oczekiwaną $\langle H\rangle_\psi$ w stanie $|\psi\rangle$, jeżeli liniowa kombinacja

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1} a_i|\phi_i\rangle$$

nie jest stanem własnym hamiltonianu $\hat{\mathbf{H}}$.