21. 03. 2010

Podstawy informatyki kwantowej
Zestaw 2
ćwiczenia 25. 03. 2010
grupy IS

2.1. Przestrzeń Hilberta stanowi przestrzeń liniową nad ciałem liczb rzeczywistych z określonym iloczynem skalarnym i zupełną bazą. Rozszyfrować i zilustrować dowolnym przykładem każdy element tej definicji.

2.2. Sprawdzić czy stanowi przestrzeń liniową zbiór:

a. wektorów w przestrzeni trójwymiarowej $\mathcal{V}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3$,

b. funkcji $\mathcal{V}(\mathbb{R}) = \{f \in C[a,b] : \quad f(a) = f(b) = 0\}$,

z działaniami dodawania elementów i mnożenia przez skalary należące do ciała $\mathbb{R}$.

2.3. Zaproponować iloczyn skalarny w przestrzeniach wektorowych z zad. 2.

2.4. Sprawdzić czy zbiór macierzy 2×1, czyli

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

tworzy przestrzeń liniową.

2.5. Zaproponować iloczyn skalarny w tej przestrzeni.

2.6. Zaproponować operator działający w przestrzeni określonej w zad. 2.4. Narzucić warunek hermitowskości operatora.

2.7. Wartością oczekiwaną operatora $\hat{A}$ w stanie $|b\rangle \in \mathcal{H}$ nazywamy iloczyn skalarny wektora $\langle b|$ i wektora $\hat{A}|b\rangle$.
Przyjmijmy:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wyliczyć wartość oczekiwaną operatora $\hat{A}$ w stanie $|b\rangle$.

2.8. Równaniem własnym operatora $\hat{A}$ nazywamy równanie własne w postaci

$$\hat{A}|a\rangle = \lambda|a\rangle,$$

gdzie $|a\rangle$ jest elementem przestrzeni wektorowej, a λ i $|a\rangle$ są wielkościami szukanymi. Napisz i rozwiąż równanie własne dla operatora określonego w zad. 2.7.