03. 12. 2012

Podstawy informatyki kwantowej
Zestaw 3

—

grupa IS

2.1. Niech $\hat{\mathbf{U}}$ jest macierzą unitarną o wymiarze 2×2, taką że

$$\hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

gdzie $\det \hat{\mathbf{U}} = 1$.
Pokaż, że $a^* = d$, $b = -c^*$ oraz $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

2.2. Operator typu *bramka Hadamarda* zapisany w reprezentacji macierzowej ma postać:

$$\hat{\mathbf{O}}_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a. Sprawdź czy $\hat{\mathbf{O}}_H$ jest operatorem unitarnym.

b. Znajdź wartości własne i wektory własne tego operatora.

2.3. Znajdź transformację unitarną, która diagonalizuje macierz

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}.$$

2.4. Macierze Pauliego $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ zdefiniowane są jako macierze 2×2 spełniające warunki:

a) $[\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_k$,

b) $[\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j]_+ = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i\hat{\boldsymbol{\sigma}}_j + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i = 2\delta_{ij}\hat{\mathbb{1}}$.

Proszę udowodnić:

a) $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^2 = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2^2 = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_3^2 = \hat{\mathbb{1}}$,

b) $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i\hat{\boldsymbol{\sigma}}_j = i\varepsilon_{ijk}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_k$, dla $i \neq j$,

c) $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2\hat{\boldsymbol{\sigma}}_3 = i\hat{\mathbb{1}}$,

d) $Tr\{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i\} = 0$,

e) $det\{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i\} = -1$.

.

2.5. Proszę udowodnić tożsamość

$$(\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})(\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) = \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{B}} + i(\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{B}}) \cdot \hat{\sigma},$$

gdzie $\hat{\mathbf{A}}$ oraz $\hat{\mathbf{B}}$ są dowolnymi operatorami wektorowymi, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ macierz Pauliego, i - jednostka urojona.

2.6. Proszę pokazać, że dowolny operator działający w 2-D przestrzeni Hilberta można wyrazić przez macierze Pauliego w następujący sposób:

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\left[a_0 \hat{\mathbb{1}} + \mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}\right],$$

gdzie $a_0 = Tr\{\hat{\mathbf{A}}\}$, $\mathbf{a} = Tr\{\hat{\mathbf{A}}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\}$.