21. 04. 2010

Podstawy informatyki kwantowej
Zestaw 3
ćwiczenia 29. 04. 2010
grupy IS

3.1. Niech $| u_i >$, $| u_j >$ oraz $| u_k >$ stanowią bazę ortonormalną w trójwymiarowej przestrzeni wektorowej nad ciałem liczb zespolonych.
Oblicz $< \phi|\phi >$, $< \psi|\psi >$ oraz $< \phi|\psi >$, gdy *wektory stanu* mają postać

$$| \psi >= 2i| u_i > -| u_j > +4| u_k >, \quad | \phi >= | u_i > +3i| u_j > -| u_k >,$$

a następnie sprawdzić czy spełniona jest nierówność Schwartza.

$$| < \phi|\psi > |^2 \quad \leq \; < \phi|\phi >< \psi|\psi > .$$

3.2. Operator $\hat{\mathbf{A}}$ działający w trójwymiarowej przestrzeni wektorowej nad ciałem liczb zespolonych ma postać

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 3+2i & 3i \\ -i & 3i & 8 \\ 1-i & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

natomiast wektory stanu dane są wyrażeniami:

$$|\psi >= \begin{pmatrix} -1+i \\ 3 \\ 2+3i \end{pmatrix}, \qquad < \phi| = \begin{pmatrix} 6 & -i & 5 \end{pmatrix}$$

a. Oblicz $\hat{\mathbf{A}}|\psi >$, $< \phi|\hat{\mathbf{A}}$ oraz $|\psi >< \phi|$.

b. Znajdź sprzeżenie zespolone, transpozycję oraz sprzężenie hermitowskie dla wielkości $\hat{\mathbf{A}}$, $|\psi >$ oraz $< \phi|$.

3.3. Z elementów $| u_i >$, $| u_j >$ oraz $| u_k >$, które stanowią bazę ortonormalną w trójwymiarowej przestrzeni zespolonej utworzono następujęce wyrażenia

$$| \phi_1 >= | u_i > +i| u_k >, \quad | \phi_2 >= | u_j > -| u_k > .$$

Niech $\hat{\mathbf{B}}$ jest operatorem liniowym, którego reprezentacja macierzowa w bazie $\{| u_n >\}$ ma postać

$$\hat{O} = \begin{bmatrix} 4 & 2i & 3 \\ -2i & 0 & 1+i \\ 3 & 1-i & -2 \end{bmatrix}.$$

Wykaż, że operator $\hat{\mathbf{B}}$ jest hermitowski w oparciu o wyrażenia:
$< \phi_1|\hat{\mathbf{B}}|\phi_1 >$ i $< \phi_2|\hat{\mathbf{B}}|\phi_2 >$.
Jaką interpretację można nadać tym wyrażeniom?

3.4. Niech elementy $| \ u_i >$, $| \ u_j >$ oraz $| \ u_k >$, stanowią bazę ortonormalną w przestrzeni liniowej $\mathcal{V}(\mathbb{C})$ i niech $\hat{\mathbf{C}}$ jest operatorem liniowym działającym w tej przetrzeni takim, że:

$$\hat{\mathbf{C}}| \ u_i >= 2| \ u_i >, \qquad \hat{\mathbf{C}}| \ u_j >= 3| \ u_i > -i| \ u_k >, \qquad \hat{\mathbf{C}}| \ u_k >= -| \ u_j >$$

Znajdź reprezentację macierzową tego operatora w bazie $\{| \ u_n >\}$.

3.5. Niech $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \ldots$ oraz energie $E_1, E_2, \ldots$ są odpowiednio stanami własnymi i wartościami własnymi hamiltonianu $\hat{\mathbf{H}}$. Oblicz wartość oczekiwaną $\langle H \rangle_\psi$ w stanie $|\psi\rangle$, jeżeli liniowa kombinacja

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1} a_i |\phi_i\rangle$$

nie jest stanem własnym hamiltonianu $\hat{\mathbf{H}}$.

3.6. Niech $\hat{\mathbf{U}}$ jest macierzą unitarną o wymiarze 2×2, taką że

$$\hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

gdzie $\det \hat{\mathbf{U}} = 1$.
Pokaż, że $a^* = d$, $b = -c^*$ oraz $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

3.7. Operator typu *bramka Hadamarda* zapisany w reprezentacji macierzowej ma postać:

$$\hat{\mathbf{O}}_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a. Sprawdź czy $\hat{\mathbf{O}}_H$ jest operatorem unitarnym.

b. Znajdź wartości własne i wektory własne tego operatora.

3.8. Znajdź transformację unitarną, która diagonalizuje macierz

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}.$$