

Podstawy informatyki kwantowej
Zestaw 4
 —
grupa IS

- 4.1.** Znajdź ewolucję stanu kwantowego nie będącego stanem własnym hamiltonianu.
- 4.2.** Stan układu kwantowego podlega dynamice określonej równaniem w postaci

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}} |\psi(t)\rangle \quad (1)$$

gdzie hamiltonian $\hat{\mathcal{H}}$ generuje ewolucję układu w czasie¹.

Rozwiązanie równania (1) spełniające warunek początkowy $|\psi(t_0)\rangle$ można symbolicznie zapisać jako

$$|\psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{U}}(t - t_0) |\psi(t_0)\rangle,$$

gdzie $\hat{\mathcal{U}}(t - t_0)$ jest operatorem ewolucji czasowej.

Proszę pokazać, że operator ewolucji czasowej można przedstawić w postaci

$$\hat{\mathcal{U}}(t - t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}(t-t_0)}.$$

- 4.3.** Hamiltonian dwustanowego układu kwantowego ma postać:

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} \omega & \gamma \\ \gamma & \omega \end{bmatrix}$$

gdzie $\omega, \gamma \in \mathbb{R}$.

Proszę znaleźć ewolucję czasową tego układu zakładając, że w chwili początkowej układ znajdował się w stanie kwantowym $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$, gdzie $|0\rangle^T = [1 \ 0]$.

¹Dla uproszczenia zakładamy, że hamiltonian nie zależy od czasu.

- 4.4. Wartością oczekiwaną operatora \hat{A} w stanie $|\phi\rangle$ nazywamy biliniową formę funkcji $\phi(x)$ wyrażoną wzorem

$$\langle A \rangle_\phi = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi^*(x) \hat{A} \phi(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx |\phi(x)|^2}.$$

Proszę policzyć wartości oczekiwane operatorów:

- $\hat{A} = \hat{x}$,
- $\hat{B} = \frac{d}{dx}$,
- $\hat{C} = \frac{d^2}{dx^2}$,
- $\hat{D} = \frac{d}{dx} + \hat{x}$,

w stanie reprezentowanym przez funkcję $\phi(x) = \exp[-\alpha x^2]$.
Czy funkcja $\phi(x)$ jest funkcją własną któregoś z operatorów?

- 4.5. Funkcja falowa jest dana wzorem

$$\psi(x) = A \begin{cases} e^{-\beta x}, & x \geq 0, \\ e^{\beta x}, & x < 0 \end{cases}$$

Proszę:

- unormować funkcję $\psi(x)$,
 - obliczyć prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w obszarze między $x = 1/\beta$, a $x = 2/\beta$.
- 4.6. Cząstka o masie m jest uwięziona w nieskończonej studni potencjału o szerokości L . Funkcja falowa odpowiadająca stanowi tej cząstki ma postać:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{10L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + A \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{3}{\sqrt{5L}} \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right).$$

Proszę:

- znaleźć stałą A ,
- podać jakie są możliwe wyniki pomiaru energii i jakie są ich prawdopodobieństwa.

Wskazówka: Funkcje własne i wartości własne dla cząstki uwięzionej w nieskończonej studni potencjału mają postać:

$$\psi_n(x) = A \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$