01. 10. 2019

Metody ilościowe w naukach technicznych

Zestaw 1

1.1. Przy pomocy kwantyfikatorów zapisz zdania

- "każda liczba naturalna należy do zbioru liczb całkowitych"
- "dla każdej liczby naturalnej istnieje liczba naturalna od niej większa"

1.2. Ile elementów ma zbiór

(a) $A := \{1, 2, 3, 4, \{5, 6\}, \{\{7\}, \{8, 9\}\}\}$;

(b) $B := \{n \in \mathbb{Z} \mid -2 < n \leq 4\}$;

(c) $C := A \times B$;

(d) $\emptyset$;

(e) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$;

wymień te elementy.
Za pomocą diagramów Venna wyznacz $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$.

1.3. Wiedząc, że $A := (0, \pi]$, $B := \mathbb{N} \cup \left[\frac{\pi}{2}, 4\right)$ wyznacz

(a) $A - B$; $B - A$;

(b) $A \cap B$; $A \cup B$;

Zaznacz powyższe zbiory na osi liczbowej.
Wyznacz zbiór $A \times B$ i narysuj go na płaszczyźnie XY.
Czy dla powyższych zbiorów zachodzi

(a) $A \setminus B \subset A$;

(b) $B \setminus A \subset A$;

(c) $\emptyset \in A$;

(d) $\emptyset \subset A$;

Czy, któreś z powyższych jest spełnione dla dowolnego A i B?

1.4. Wiedząc, że $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$, $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 3 - 2x - x^2\}$ wyznacz

(a) $A - B$; $B - A$;

(b) $A \cap B$; $A \cup B$;

Zaznacz powyższe zbiory na płaszczyźnie XY.

1.5. Metodą indukcji matematycznej udowodnij, że

- $\forall_{n\in\mathbb{N}} \; 1^2+2^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- n-ty wyraz szeregu geometrycznego $a_n = a_1 q^{n-1}$
- $\forall_{m\in\mathbb{N}\cap[5,\infty)} \; 2^m > m^2$
- $\forall_{n\in\mathbb{N}} \forall_{a\leq 0} (1+a)^n \leq 1+na+\dfrac{n(n-1)}{2}a^2$
- $\sin x+\sin 2x+...+\sin nx = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}x} \sin \frac{1}{2}nx \sin \frac{1}{2}(n+1)x$
- $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$
- $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

1.6. Rozłóż na ułamki proste

- $\frac{1}{(x-1)(x+3)}$
- $\frac{1}{y(y-1)(y-3)}$
- $\frac{100}{y(2y^2+3y+4)}$
- $\frac{9-s}{s^2-2s+1}$
- $\frac{s+1}{s(s^2+s-6)}$
- $\frac{z+2}{(z-1)^2(z^2-2z+2)}$
- $\frac{z^2}{(z^2-4)(z+1)}$

Sylwia Gutowska, Damian Kołaczek, Bartłomiej Spisak