

## **Metody ilościowe w naukach technicznych**

### **Zestaw 2**

**2.1.** Proszę udowodnić, korzystając z zasady indukcji matematycznej, że dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$  prawdziwe są następujące własności:

- a)  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$ ,
- b)  $1 + 5 + 9 + \dots + (4n + 1) = (n + 1)(2n + 1)$ ,
- c)  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$ ,
- d)  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$ ,
- e)  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$ , gdzie  $i$  jest jednostką urojoną.

**2.2.** Rozwiąż nierówności

- (a)  $\sqrt{x^2} \leq 4$ ;
- (b)  $|x^2 - 5x + 4| < 4$ ;
- (c)  $|x + y| + |x - y| \leq 4$ ;
- (d)  $x^2 + y^2 < 16$ ;

Narysuj zbiór będący sumą i różnicą zbiorów rozwiązań podpunktów (d) i (c).

**2.3.** Narysuj funkcje

- (a)  $4^{x-|x|}$ ;
- (b)  $5^{\frac{x^2}{|x|}}$ ;
- (c)  $(x - 2)^2 + 4$ ;
- (d)  $\left| \frac{x-2}{x+2} \right|$ ;

**2.4.** Mając dane funkcje

- (a)  $f(x) = \cos x$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$ ;
- (b)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = x^2$ ;
- (c)  $f(x) = 2x + 1$ ,  $g(x) = e^x$ ;

Znajdź złożenia funkcji  $(g \circ f)$  i  $(f \circ g)$  oraz określ ich dziedziny.

**2.5.** Znajdź funkcje odwrotne do funkcji

- (a)  $2x + 1$ ;
- (b)  $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ;
- (c)  $\frac{x-2}{x+2}$ ;
- (d)  $\frac{3^x-2}{3^x+2}$ ;

**2.6.** Narysuj funkcję

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < -4 \\ -8, & x = -4 \\ -16 - 4x, & x \in (-4, 0) \\ 0, & x = 0 \\ 16 - 4x, & x \in (0, 4) \\ 8, & x = 4 \\ x^2, & x > 4 \end{cases} .$$

Czy jest to funkcja różnowartościowa, monotoniczna, odwracalna?

**Marcin Guzik, Bartłomiej Spisak**