05. 10. 2017

Metody ilościowe w naukach technicznych

Zestaw 2

2.1. Proszę udowodnić, korzystając z zasady indukcji matematycznej, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwe są następujące własności:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$,

b) $1 + 5 + 9 + \ldots + (4n+1) = (n+1)(2n+1)$,

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$,

d) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$,

e) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$, gdzie i jest jednostką urojoną.

2.2. Rozwiąż nierówności

(a) $\sqrt{x^2} \leq 4$;

(b) $|x^2 - 5x + 4| < 4$;

(c) $|x+y| + |x-y| \leq 4$;

(d) $x^2 + y^2 < 16$;

Narysuj zbiór będący sumą i różnica zbiorów rozwiązań podpunktów (d) i (c).

2.3. Narysuj funkcje

(a) $4^{x-|x|}$;

(b) $5^{\frac{x^2}{|x|}}$;

(c) $(x-2)^2 + 4$;

(d) $\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$;

2.4. Mając dane funkcje

(a) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sqrt{x}$;

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2$;

(c) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = e^x$;

Znajdź złożenia funkcji $(g \circ f)$ i $(f \circ g)$ oraz określ ich dziedziny.

2.5. Znajdź funkcje odwrotne do funkcji

(a) $2x + 1$;

(b) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$;

(c) $\frac{x-2}{x+2}$;

(d) $\frac{3^x-2}{3^x+2}$;

2.6. Narysuj funkcję

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \quad x < -4 \\ -8 & , \quad x = -4 \\ -16 - 4x & , \quad x \in (-4, 0) \\ 0 & , \quad x = 0 \\ 16 - 4x & , \quad x \in (0, 4) \\ 8 & , \quad x = 4 \\ x^2 & , \quad x > 4 \end{cases} .$$

Czy jest to funkcja różnowartościowa, monotoniczna, odwracalna?

Marcin Guzik, Bartłomiej Spisak