

Metody ilościowe w naukach technicznych

Zestaw 2

2.1. Proszę udowodnić, korzystając z zasady indukcji matematycznej, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwe są następujące własności:

- a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$,
 b) $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$, gdzie i jest jednostką urojoną.

Wskazówka:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

2.2. Narysuj funkcje

(a) $\left| \frac{x-2}{x+2} \right|$;

(b) $5^{\frac{x^2}{|x|}}$;

2.3. Rozwiąż nierówności

(a) $\sqrt{x^2} \leq 4$;

(b) $|x + y| + |x - y| \leq 4$;

2.4. Mając dane funkcje

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2$;

(b) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sqrt{x}$;

Znajdź złożenia funkcji ($g \circ f$) i ($f \circ g$) oraz określ ich dziedziny.

2.5. Znajdź funkcje odwrotne do funkcji

(a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$;

(b) $\frac{x-2}{x+2}$;

2.6. Narysuj funkcję:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , x < -4 \\ -8 & , x = -4 \\ -16 - 4x & , x \in (-4, 0) \\ 0 & , x = 0 \\ 16 - 4x & , x \in (0, 4) \\ 8 & , x = 4 \\ x^2 & , x > 4 \end{cases} .$$

Czy jest to funkcja różnowartościowa, monotoniczna, odwracalna?

2.7. Proszę wykonać podane działania, a uzyskany wynik zapisać w postaci algebraicznej

a) $(-2 + 3i) + (7 - 8i), (4i - 3) - (1 + 10i),$

b) $(2 - 3i)/(5 + 4i), (2 + 3i)/(1 + i),$

c) $zw^*, (z - w)/(z^* + w^*), (\Re\{z\} + i\Im\{w\})/(z + w^*),$
gdzie $z = 5 - 2i, w = 3 + 4i.$

2.8. Proszę wyznaczyć liczby rzeczywiste x i y , takie że

a) $(4 - 2i)x - 2i(x - iy) = 2 - 8i,$

b) $(x + y) + i(x - y) = (2 + 5i)^2 + i(2 - 3i),$

c) $(2 + 3i)x^2 + (2 + i)x + (4 - 3i)y = 8 + 17i.$

Sylwia Gołqb, Paweł Gutowski, Damian Kołaczek, Bartłomiej Spisak