21. 10. 2019

Metody ilościowe w naukach technicznych

Zestaw 3

2.1. Proszę wyznaczyć liczby rzeczywiste x i y, takie że

a) $(4-2i)x - 2i(x-iy) = 2-8i$,
b) $(x+y)+i(x-y) = (2+5i)^2 + i(2-3i)$,
c) $(2+3i)x^2 + (2+i)x + (4-3i)y = 8+17i$.

2.2. Proszę wyznaczyć część rzeczywistą lub część urojoną

a) $\mathfrak{Im}\{(z-2i)z^*\}$
b) $\mathfrak{Re}\{2z(z+i)(z-3i)\}$
c) $\mathfrak{Re}\{2z/(z+i)\}$,
d) $\mathfrak{Im}\{iz^2/z^*\}$,
e) $\mathfrak{Im}\{(z-2i)z^*\}$

gdzie $z = x+iy$.

2.3. Proszę wyznaczyć moduły z następujących liczb zespolonych

a) $z = 4+3i$, $z = \sqrt{3}-2i$, $z = -2+5i$, $z = -3i$,
b) $\dfrac{(1-3i)(1+3i)}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}$, $\left(\dfrac{2-i}{2+i\sqrt{6}}\right)^6$.

2.4. Proszę rozwiązać równania w zbiorze liczb zespolonych:

a) $2z^2+8z+26=0$,
b) $z^2-z+1=0$,
c) $z^2+3z^*=0$,
d) $(z+1)/(z^*-1)=-1$,
e) $z^2+(1+i)z+\frac{1}{2}=0$,
f) $2z^2-4z+1-\sqrt{3}i=0$.

2.5. Proszę przedstawić poniższe liczby w postaci trygonometrycznej, algebraicznej i wykładniczej.

a) -6,
b) $2+2i$,
c) $11\sqrt{3}+11i$,
d) $-8\sqrt{3}-8i$,

2.6. Proszę obliczyć

a) $(1-i)^{10}$,
b) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{12}$,

2.7. Przedstaw liczbę zespoloną

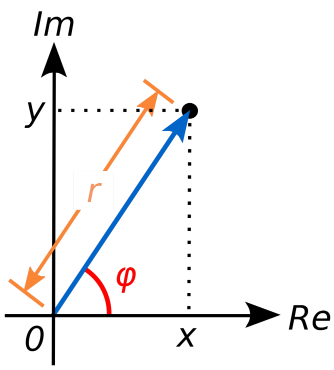
$$z = \frac{8}{\left(\left(\sqrt{3}+1\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)i\right)\left(\left(\sqrt{3}+1\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)i\right)}$$

w postaci algebraicznej, trygonometrycznej i wykładniczej.

Uzupełnienie

Postać trygonometryczna i wykładnicza liczby zespolonej:

$$z = x + iy = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$



Mamy więc

$$\begin{aligned} r &= |z| = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\phi &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\phi &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \end{aligned}$$

i wreszcie

$$z = r\left(cos\phi + i\sin\phi\right).$$

Z poprzednich zajęć znamy już wzór de Moivre'a

$$z^n = r^n\left(cos\phi + i\sin\phi\right)^n = r^n\left(cos\left(n\phi\right) + i\sin\left(n\phi\right)\right),$$

który dla $n = 1$ sprowadza się do

$$cos\phi + i\sin\phi = e^{i\phi},$$

co prowadzi do wykładniczej postaci liczby zespolonej

$$z = re^{i\phi}$$

i wzoru

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$