

Metody ilościowe w naukach technicznych

Zestaw 3

3.1. Proszę wyznaczyć część rzeczywistą lub część urojoną

a) $\Re\{2z/(z - i)\}$,

b) $\Im\{iz^2/z^*\}$,

gdzie $z = (x, y)$.

3.2. Proszę wyznaczyć moduły z następujących liczb zespolonych

a) $z = 4 + 3i$, $z = \sqrt{3} - 2i$, $z = -2 + 5i$, $z = -3i$,

b) $\frac{(1 - 3i)(1 + 3i)}{(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})}$, $\left(\frac{2 - i}{2 + i\sqrt{6}}\right)^6$.

3.3. Proszę rozwiązać równania w zbiorze liczb zespolonych:

a) $x^2 + 4x + 13 = 0$,

c) $z^2 + 3z^* = 0$,

b) $z^2 - z + 1 = 0$,

d) $(z + 1)/(z^* - 1) = -1$.

3.4. Proszę przedstawić poniższe liczby w postaci trygonometrycznej, algebraicznej i wykładniczej.

a) -6 ,

c) $11\sqrt{3} + 11i$,

b) $2 + 2i$,

d) $-8\sqrt{3} - 8i$,

3.5. Proszę obliczyć

a) $(1 - i)^{10}$,

b) $(\sqrt{3} - i)^{12}$,

3.6. Przedstaw liczbę zespoloną

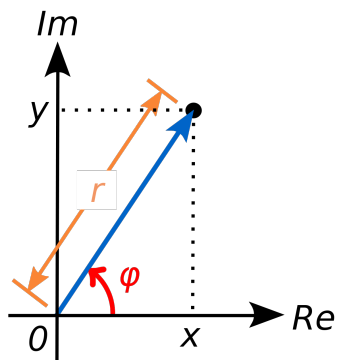
$$z = \frac{8}{((\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i)((\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i)}$$

w postaci algebraicznej, trygonometrycznej i wykładniczej.

Uzupełnienie

Postać trygonometryczna i wykładnicza liczby zespolonej:

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$



Mamy więc

$$\begin{aligned} r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos \phi &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \phi &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{aligned}$$

i wreszcie

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Z poprzednich zajęć znamy już wzór de Moivre'a:

$$z^n = r^n (\cos \phi + i \sin \phi)^n = r^n (\cos (n\phi) + i \sin (n\phi)),$$

który pozwala nam zgadnąć (więcej na zajęciach)

$$\cos \phi + i \sin \phi = e^{i\phi},$$

co prowadzi do wykładniczej postaci liczby zespolonej

$$z = r e^{i\phi}$$

i wzoru

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$