05. 11. 2016

Metody ilościowe w naukach technicznych

Zestaw 4

4.1. Macierze $\hat{\mathbf{A}}$ oraz $\hat{\mathbf{B}}$ są określone w następujący sposób

(a) $\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$;

(b) $\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(c) $\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$;

(d) $\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Proszę obliczyć $2\hat{\mathbf{A}} - 3\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{A}}^T$, $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{A}}^2$ o ile to jest możliwe.

4.2. Dane są macierze

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pod warunkiem, że istnieje macierz określona przez iloczyn macierzy: $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$, bedący wynikiem ich permutacji: $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{C}}$, $\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{C}}$, $\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}$. Proszę wyznaczyć element macierzowy x_{34} w każdym z możliwych przypadków.

4.3. Proszę znaleźć liczby c oraz d będące odpowiednimi elemantami macierzy

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ c & d \end{pmatrix}$$

w przypadku, gdy spełnione są następujące warunki: a) $\hat{\mathbf{A}}^2 = \hat{\mathbf{0}}$, b) $\hat{\mathbf{A}}^2 = -\hat{\mathbf{1}}$.

4.4. Proszę policzyć $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{A}}^T$ oraz $\hat{\mathbf{A}}^T\hat{\mathbf{A}}$, jeżeli macierz $\hat{\mathbf{A}}$ ma postać

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.5. Obrót na płaszczyznie XY jest reprezentowany przez macierz

$$\hat{\mathbf{A}}\left(\theta\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Proszę:

(a) zaznaczyć na płaszczyznie XY wektor $\mathbf{r}_1 = (1,1)$ oraz wektor $\mathbf{r_2}$ będący jego obrotem o kąt $\theta = \pi/4$, a następnie zweryfikować, że $\mathbf{r_2} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{r_1^T}$.

(b) sprawdzić czy $\hat{\mathbf{A}}(\theta_1)\hat{\mathbf{A}}(\theta_2) = \hat{\mathbf{A}}(\theta_1 + \theta_2)$ oraz obliczyć $\hat{\mathbf{A}}(\theta)\hat{\mathbf{A}}(-\theta)$. Czy zgadza się to z Waszą geometryczną intuicją?

Marcin Guzik, Bartłomiej Spisak