26. 11. 2018

Metody ilościowe w naukach technicznych

Zestaw 4

4.1. Dla wektorów $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ proszę wyznaczyć:

a) $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $2\vec{a} \cdot (-3\vec{b})$

c) $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times (3\vec{a})$.

4.2 Proszę obliczyć objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach:
$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.
Wskazówka: Objętość jest równa V=$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$.

4.3 Dane są dwa wektory $\vec{a} = 3\vec{e_1} - 2\vec{e_2} + 4\vec{e_3}$ oraz $\vec{b} = 4\vec{e_1} - 3\vec{e_2} - \vec{e_3}$. Proszę obliczyć:

a) kąt jaki tworzą te wektory,

b) składową wektora $\vec{a}$ równoległą i prostopadłą do wektora $\vec{b}$.

4.4 Znajdź wartości liczby k dla której wektor $\vec{v}$ jest ortogonalny do wektora $\vec{u}$:

a) $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{u} = \begin{bmatrix} k^2 \\ k \\ -3 \end{bmatrix}$

b) $\vec{v} = \begin{bmatrix} k+i \\ k+2 \\ k-1+2i \end{bmatrix}$, $\vec{u} = \begin{bmatrix} k-2 \\ 6-i \\ 2 \end{bmatrix}$

4.5 Prosta p na płaszczyźnie określona jest równaniem $-3x + 4y = -15$. Przez punkt o wektorze wodzącym $x_0 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ poprowadź prostą q prostopadłą do prostej p.

4.6 W przestrzeni, odpowiednio w podpunktach a) $\mathbb{R}^3$ i b) $\mathbb{C}^3$, ze standardowym iloczynem skalarnym przeprowadź ortogonalizację Grama-Schmidta układu wektorów $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$. Czy otrzymany układ wektorów stanowi bazę w tej przestrzeni? Jeśli tak, to rozwiń w niej wektory $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$:

a) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

b) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}$,

4.7* W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowo określonym iloczynem skalarnym znajdź rzut wektora $\vec{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$ na dwuwymiarową podprzestrzeń rozpiętą na wektorach $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ oraz $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}$, a także znajdź składową wektora $\vec{v}$ ortogonalną do tej podprzestrzeni.

Sylwia Gołąb, Paweł Gutowski, Damian Kołaczek, Bartłomiej Spisak