03. 12. 2019

Metody ilościowe w naukach technicznych

Zestaw 4

4.1 W trójwymiarowej rzeczywistej przestrzeni wektorowej dana jest nieortogonalna baza $\vec{v}_1 = (1, 2, -2)$, $\vec{v}_2 = (-2, -1, 7)$, $\vec{v}_3 = (5, 0, -2)$.

a) Rozwiń w tej bazie wektor $\vec{u} = (4, 0, 3)$ (tzn. przedstaw ten wektor jako kombinację liniową wektorów bazowych).

b) Przeprowadź ortogonalizację Grama-Schmidta układu wektorów $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$.

c) W uzyskanej bazie ortogonalnej rozwiń wektor $\vec{u}$, a także wektory $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ i $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$.

4.2 W trójwymiarowej zespolonej przestrzeni wektorowej dana jest nieortogonalna baza $\vec{v}_1 = (i, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, i, 0)$, $\vec{v}_3 = (1, 1, i)$.

a) Rozwiń w tej bazie wektor $\vec{u} = (7+5i, 9i, -2)$ (tzn. przedstaw ten wektor jako kombinację liniową wektorów bazowych).

b) Przeprowadź ortogonalizację Grama-Schmidta układu wektorów $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$.

c) W uzyskanej bazie ortogonalnej rozwiń wektor $\vec{u}$, a także wektory $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ i $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$.

Uwaga

W zespolonych przestrzeniach wektorowych iloczyn skalarny wektorów definiujemy następująco

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \cdot (b_1, b_2, ..., b_n) = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + ... + a_n^* b_n,$$

gdzie n jest liczbą wymiarów przestrzeni. Jak łatwo sprawdzić w przypadku wektorów rzeczywistych powyższa definicja sprowadza się do znanego z wykładu wzoru na iloczyn skalarny wektorów. Operacje takie jak rzutowanie wektorów, czy ortogonalizacja Grama-Schmidta przebiegają analogicznie, jak w przypadku rzeczywistym, uwzględniając jedynie uogólnioną definicję iloczynu skalarnego. Rzut wyraża się wzorem $rzut_{\vec{u}}\vec{w} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$ i w przypadku zespolonym ważna jest kolejność wektorów w iloczynie skalarnym!

4.3 W trójwymiarowej rzeczywistej przestrzeni wektorowej dany jest wektor $\vec{w} = (13, 9, 16)$. Znajdź składową tego wektora prostopadłą do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{u} = (3, 1, 4)$ oraz $\vec{v} = (1, 2, 3)$, a także rzut wektora $\vec{w}$ na tę płaszczyznę.
Wskazwka możesz skorzystać z własności iloczynu wektorowego.

Sylwia Gutowska, Damian Kołaczek, Bartłomiej Spisak