10. 12. 2019

Metody ilościowe w naukach technicznych

Zestaw 5

5.1 Macierze $\hat{\mathbf{A}}$ oraz $\hat{\mathbf{B}}$ są określone w następujący sposób

(a) $\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

(c) $\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Proszę obliczyć $2\hat{\mathbf{A}} - 3\hat{\mathbf{B}}$, $3\hat{\mathbf{A^T}} + \hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}$ oraz $\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}$, o ile to jest możliwe.

5.2 Obrót o kąt 90^o jest reprezentowany przez macierz

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Narysuj wektor $\mathbf{r_1} = (2,1)^T$ i wektor $\mathbf{r_2} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{r_1}$. Obliczając iloczyn skalarny sprawdź, czy są one do siebie prostopadłe?

(b) Wynikiem translacji (przesunięcia) wektora $\mathbf{r}$ o dowolny wektor $\mathbf{t}$ jest wektor $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{t}$. Sprawdź, czy dla wektora $\mathbf{r_1} = (2,1)^T$ operacje obrotu o 90^o i translacji o wektor $\mathbf{t} = (1,0)^T$ są przemienne? Narysuj na płaszczyźnie XY wektor $\mathbf{r_1}$ oraz wyniki kolejnych operacji na nim.

5.3 Obrót na płaszczyznie XY o dowolny kąt θ jest reprezentowany przez macierz

$$\hat{\mathbf{A}}\,(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Proszę:

(a) zaznaczyć na płaszczyznie XY wektor $\mathbf{r}_1 = (1,1)^T$ oraz wektor $\mathbf{r_2}$ będący jego obrotem o kąt $\theta = \frac{\pi}{4}$, a następnie zweryfikować, że $\mathbf{r}_2 = \hat{\mathbf{A}}(\frac{\pi}{4})\mathbf{r}_1$.

(b) sprawdzić czy $\hat{\mathbf{A}}(\theta_1)\hat{\mathbf{A}}(\theta_2) = \hat{\mathbf{A}}(\theta_1 + \theta_2)$ oraz obliczyć $\hat{\mathbf{A}}(\theta)\hat{\mathbf{A}}(-\theta)$. Czy zgadza się to z geometryczną intuicją?

5.4 Każdy obrót w 3D można wykonać jako złożenie trzech obrotów podstawowych, tzn. obrotów wokół osi x, y, z, danych przez macierze:

$$\hat{\mathbf{R}}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \; \hat{\mathbf{R}}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{R}}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sprawdź, czy złożenia następujących obrotów są przemienne:

(a) $\mathbf{R}_x(\frac{\pi}{4})$ oraz $\mathbf{R}_y(\frac{\pi}{4})$.

(b) $\mathbf{R}_x(\pi)$ oraz $\mathbf{R}_z(\pi)$.

W każdym przypadku znajdź wynik działania złożenia obrotów na wektor $\mathbf{r} = (1, 2, 1)^T$.

5.5* Dana jest macierz

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Policz kilka kolejnych potęg macierzy $\hat{\mathbf{A}}$, tj. $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{A}}^2$, $\hat{\mathbf{A}}^3$, ... i na ich podstawie zapostuluj ogólną postać macierzy $\hat{\mathbf{A}}^n$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną spełniającą warunek $n \geq 1$. Udowodnij poprawność zapostulowanego wzoru metodą indukcji matematycznej.
Wskazowka Jeżeli masz problem z odgadnięciem ogólnej postaci elementu $(1, 3)$ szukanej macierzy $\hat{\mathbf{A}}^n$, to możesz spróbować zapostulować go w postaci $f(n) = an^2 + bn + c$, a następnie ułożyć układ równań na stałe a, b, c, korzystając z policzonych poprzednio kilku kolejnych potęg macierzy $\hat{\mathbf{A}}$.

5.6* Dana jest macierz

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Proszę obliczyć sumę ciągu geometrycznego

$$\sum_{n=0}^{101} \hat{\mathbf{A}}^n = \hat{\mathbf{A}}^0 + \hat{\mathbf{A}}^1 + ... + \hat{\mathbf{A}}^{101}$$

przy czym $\hat{\mathbf{A}}^0 = \hat{\mathbf{1}}$, gdzie $\hat{\mathbf{1}}$ jest macierzą jednostkową.

(b) Czy macierzowe uogólnienie znanego wzoru na sumę ciągu geometrycznego

$$\sum_{n=0}^{N} \hat{\mathbf{A}}^n = \left(\hat{\mathbf{1}} - \hat{\mathbf{A}}^{N+1}\right)\left(\hat{\mathbf{1}} - \hat{\mathbf{A}}\right)^{-1}$$

daje taki sam wynik? Czy potrafisz wyprowadzić ten wzór?

5.7 Proszę znaleźć macierz odwrotną do macierzy

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

przy pomocy

(a) metody eliminacji Gaussa-Jordana.

(b) twierdzenia o dopełnieniach algebraicznych macierzy.

5.8 Zbadaj warunki rozwiązywalności układu równań (a, b - parametry)

$$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= -7 \\ 3x + y + 4z &= b \\ ax + 5y + z &= 18 \end{aligned}$$

Rozwiąż ten układ dla $a = 2$ i $b = 5$

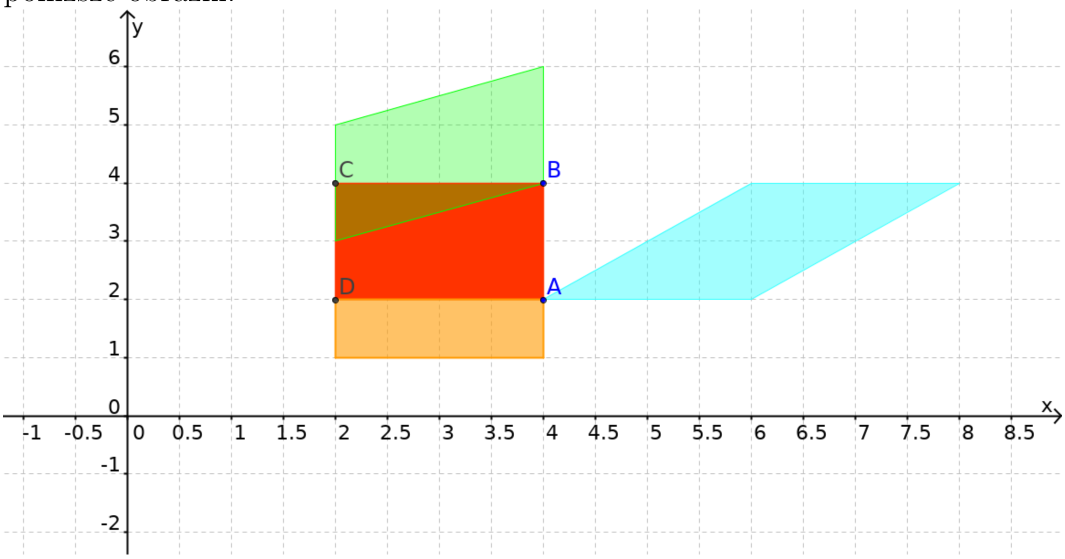
- metodą Gaussa-Jordana
- metodą Cramera

5.9 Dany jest kwadrat o wierzchołkach $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$, $D(0,2)$. Proszę znaleźć obraz tego kwadratu pod działaniem macierzy

(a) $\hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, (b) $\hat{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\hat{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (d) $\hat{\mathbf{\Omega}} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

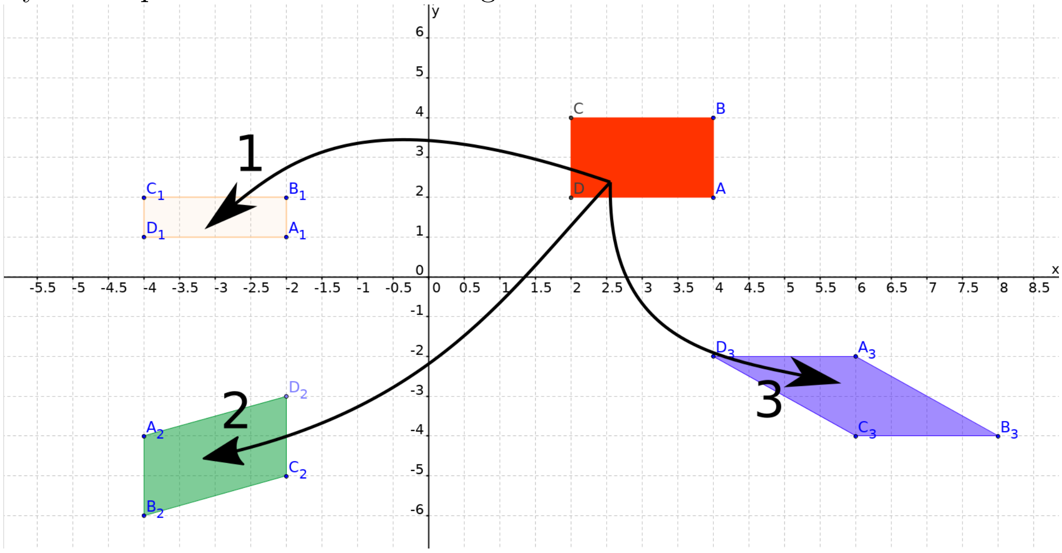
dla $k = 0.5$ oraz $k = 2$ i $m = -2$ oraz $m = 2$ i dowolnych e, f, g, h.
Oblicz pole figur przed i po transformacji.

5.10 Proszę znaleźć macierz przekształcenia kwadratu ABCD, którego wynikiem są poniższe obrazki.



Podpowiedź: Biorąc pod uwagę ogólną postać takich odwzorowań, figura=[macierz][kwadrat], rozwiąż odpowiedni układ równań.

5.11 Proszę dopasować macierze przekształcenia (X-Z) do obrazków (1-3), będących wynikiem przekształcenia czerwonego kwadratu ABCD.



$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

5.12 Proszę rozwiązać następujące równania macierzowe:

(a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\hat{\mathbf{X}}^T \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sylwia Gutowska, Damian Kołaczek, Bartłomiej Spisak