

Metody ilościowe w naukach technicznych

Zestaw 6

6.1 Dane są macierze $\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

- (a) Wyznacz wartości własne tych macierzy, a następnie sprawdź czy wyznaczniki tych macierzy są równe iloczynowi ich wartości własnych, a ślady tych macierzy sumie ich wartości własnych?
- (b) Na przykładzie macierzy $\hat{\mathbf{A}}$ oraz $\hat{\mathbf{B}}$ pokaż, że wartości własne macierzy odwrotnej są odwrotnościami wartości własnych wyjściowej macierzy.

6.2 Dana jest macierz

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

- (a) Oblicz wartości własne oraz wektory własne macierzy $\hat{\mathbf{A}}$.
- (b) Korzystając z wyników uzyskanych w podpunkcie a) znajdź ogólny wzór na macierz $\hat{\mathbf{A}}^n$, gdzie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

6.3 Dany jest ciąg zdefiniowany relacją rekurencyjną $f_n = 5f_{n-1} - 6f_{n-2}$ dla $n \geq 3$ z warunkami początkowymi $f_1 = 1$ oraz $f_2 = 5$. Znajdź macierz $\hat{\mathbf{A}}$, która przekształca wektor $\begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{bmatrix}$ w wektor $\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix}$ dla dowolnego $n \geq 3$, a następnie oblicz wyraz ciągu f_{1017} , działając odpowiednią liczbę razy macierzą $\hat{\mathbf{A}}$ na wektor $\begin{bmatrix} f_2 \\ f_1 \end{bmatrix}$. Do wyznaczenia odpowiedniej potęgi macierzy $\hat{\mathbf{A}}$ wykorzystaj transformację podobieństwa diagonalizującą tą macierz, analogicznie jak w poprzednim zadaniu.