17. 01. 2019

Metody ilościowe w naukach technicznych

Zestaw 7

- Funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale $x \in (a, b)$ nazywamy każdą funkcję $F(x)$, która spełnia

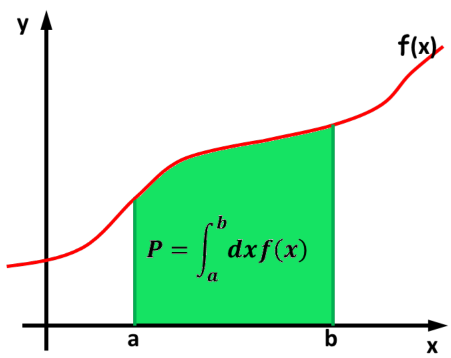
$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x) \qquad x \in (a, b)$$
$$\int \mathrm{d}x f(x) = F(x) + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

- podstawowe całki (odwrotność do podstawowych pochodnych)

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}x\, x^a &&= \frac{x^{a+1}}{a+1} + C && a \neq -1 \quad x > 0\\
&\int \mathrm{d}x\, \frac{1}{x} &&= \ln|x| + C && x \neq 0\\
&\int \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^x &&= \mathrm{e}^x + C &&\\
&\int \mathrm{d}x\, a^x &&= \frac{a^x}{\ln a} + C && a \neq 1 \quad a > 0\\
&\int \mathrm{d}x\, \cos(x) &&= \sin(x) + C &&\\
&\int \mathrm{d}x\, \sin(x) &&= -\cos(x) + C &&\\
&\int \mathrm{d}x\, \frac{1}{\cos^2(x)} &&= \tan(x) + C && \cos(x) \neq 0\\
&\int \mathrm{d}x\, \frac{1}{\sin^2(x)} &&= -\mathrm{ctan}(x) + C && \sin(x) \neq 0\\
&\int \mathrm{d}x\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &&= -\arcsin(x) + C && |x| < 1\\
&\int \mathrm{d}x\, \frac{1}{1-x^2} &&= -\arctan(x) + C && |x| < 1
\end{aligned}$$

- własności rachunku całkowego

$$\int \mathrm{d}x\, \big(f(x) + g(x)\big) = \int \mathrm{d}x\, f(x) + \int \mathrm{d}x\, g(x)$$
$$\int \mathrm{d}x\, Af(x) = A \int \mathrm{d}x\, f(x) \qquad A \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$
$$\int \mathrm{d}v\, u = uv - \int \mathrm{d}u\, v \qquad \begin{array}{l} u = u(x) \\ v = v(x) \end{array}$$
$$\int \mathrm{d}x\, f\big(g(x)\big)g'(x) = \int \mathrm{d}u\, f(u) \qquad u = g(x)$$



- całka oznaczona - interpretacja geom.

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

6.1. Oblicz następujące całki nieoznaczone

(a) $\int \mathrm{d}x \, \frac{1}{\sqrt{x}}$

(b) $\int \mathrm{d}x \, x(x-1)(x+3)$

(c) $\int \mathrm{d}x \, \frac{x\left(\sqrt{x} - x^2 \sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[5]{x}}$

(d) $\int \mathrm{d}x \left(\frac{\sin(x)}{1 + cos(x)} + \operatorname{ctan}(x) \right)^{-1}$

6.2. Oblicz następujące całki nieoznaczone całkowaniem przez podstawienie

(a) $\int \mathrm{d}x \, \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} \qquad a \neq 0$

(b) $\int \mathrm{d}x \, \sin(x)\cos(x)$

(c) $\int \mathrm{d}x \, \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}$

(d) $\int \mathrm{d}x \, \frac{\ln(x)}{x}$

6.3. Oblicz następujące całki nieoznaczone całkowaniem przez części

(a) $\int \mathrm{d}x \, \sin^2(x)$

(b) $\int \mathrm{d}x \, \frac{x}{1 + x^2}$

(c) $\int \mathrm{d}x \, \ln^2(x)$

(d) $\int \mathrm{d}x \, \arctan(x)$

6.2. Oblicz pole ograniczone

(a) łukiem paraboli $y^2 = 2x$ i prostą $x = 8$

(b) łukiem krzywej $y = x^3 + x^2 - 2x$ i osią X dla $|x| < 2$