06. 12. 2010

Matematyczne Metody Fizyki

—

ćwiczenia 13. 12. 2010
grupa R1IS3

Zestaw 9

9.1. Dana jest macierz

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2+3i & 1-i & 5i \\ 1+i & 6-i & 1+3i \\ 5-6i & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Znajdź: $\hat{A}^*$, $\hat{A}^T$, $\hat{A}^\dagger$.

9.2. Dla jakich wartości x macierz

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4 & x+2 \\ 2x-3 & x+1 \end{bmatrix}$$

jest symetryczna?

9.3. Pokaż, że

a. $(\hat{A}+\hat{B})(\hat{A}-\hat{B}) = \hat{A}^2 - \hat{B}^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[\hat{A},\hat{B}] = 0$,

b. $[\hat{A},\hat{B}^{-1}] = -\hat{B}^{-1}[\hat{A},\hat{B}]\hat{B}^{-1}$, zakładając, że $\det\hat{B} \neq 0$,

b. $\hat{B} = \left(\hat{C}\hat{A}\right)^{-1}$, jeżeli wiadomo, że $\hat{A}\hat{B}\hat{C} = \hat{I}$.

9.4. Oblicz wartość wielomianu

$$f\big(\hat{X}\big) = \hat{X}^3 - 2\hat{X}^2 + \hat{I},$$

gdzie macierz $\hat{X}$ ma postać

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

9.5. Spinowe macierze Pauliego mają postać:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \hat{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pokaż, że

$$\hat{\sigma}_i^2 = \hat{I}, \quad \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j = i\epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k, \quad \{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j\} = 2\delta_{ij},$$

gdzie ϵ_{ijk} jest symbolem Levi-Civity, natomiast δ_{ij} jest symbolem Kroneckera.

9.6. Znajdź macierz odwrotną do macierzy

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

stosując metodę operacji elementarnych.

9.7. Zapisz, funkcję $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey$ w postaci macierzowej, tzn. $f(x, y) = \mathbf{x}^T \hat{A}\mathbf{x} + \hat{B}\mathbf{x}$, gdzie $\mathbf{x} = [x \quad y]$.

9.8. Rozwiąż równanie macierzowe

$$\hat{X} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\hat{X} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

i układ równań macierzowych

$$\begin{cases} \hat{X} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\hat{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\hat{X} + \hat{Y} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

B.J. Spisak