07. 10. 2011

Zestaw 1

1.1. Dane są trzy wektory: $\mathbf{a} = [1, -1]$, $\mathbf{a} = [4, 3]$, $\mathbf{c} = [-10, -11]$. Proszę przedstawić wektor $\mathbf{c}$ jako kombinację liniową wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

1.2. Proszę obliczyć iloczyn skalarny wektorów $\mathbf{a} = [1, 2, -1]$ i $\mathbf{b} = [-1, 1, -2]$.

1.3. Proszę obliczyć kąt między wektorami $\mathbf{a} = 2\hat{\mathbf{e}}_x + 3\hat{\mathbf{e}}_y - \hat{\mathbf{e}}_z$ i $\mathbf{b} = 13\hat{\mathbf{e}}_x - 63\hat{\mathbf{e}}_y + 8\hat{\mathbf{e}}_z$, gdzie $\hat{\mathbf{e}}_i$ jest wersorem wzdłuż osi $0i$.

1.4. Proszę znaleźć rzut wektora $\mathbf{a}$ na oś o kierunku wektora $\mathbf{b}$, jeżeli wiadomo, że $a = 5$, $b = 3$ oraz $\measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \pi/3$.

1.5. Proszę znaleźć kąt między wektorami $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ wiedząc, że wektor $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ jest prostopadły do wektora $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$, a wektor $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ jest prostopadły do wektora $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

1.6. Proszę obliczyć kąt między wektorami $\mathbf{p} = 6\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ i $\mathbf{q} = 2\mathbf{m} + 10\mathbf{n}$, jeżeli wiadomo, że $\mathbf{m}$ i $\mathbf{n}$ są wektorami jednostkowymi wzajemnie prostopadłymi.

1.7. Dane są wektory $\mathbf{a} = [1, 3, 3]$, $\mathbf{b} = [0, 3, -4]$ i $\mathbf{c} = [1, 2, -1]$. Proszę znaleźć długość wektora

$$\mathbf{d} = 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} + \frac{1}{25} b^2 a + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}\mathbf{a}.$$

1.8. Proszę znaleźć cosinusy kierunkowe wektora $\mathbf{a} = [1, -1, 2]$.

1.9. Dla jakiej wartości parametru λ wektory $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} + \lambda\mathbf{q}$ oraz $\mathbf{b} = -\mathbf{p} + 2\mathbf{q}$ są wzajemnie prostopadłe, jeżeli wiadomo, że $p = 5$, $q = 3$ oraz $\measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (2/3)\pi$.

1.10. W punkcie $A = [3, -1, 5]$ przyłożono siłę $\mathbf{F} = [2, 5, -4]$. Proszę wyznaczyć moment tej siły względem punktu $B = [1, -2, 3]$.

1.11. Dane są wektory $\mathbf{a} = [3, -1, -2]$, $\mathbf{b} = [1, 2, -1]$. Proszę znaleźć współrzędne wektora $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{b}$.

1.12. Proszę uprościć wyrażenia

(a) $\hat{\mathbf{e}}_x \times (2\hat{\mathbf{e}}_y - \hat{\mathbf{e}}_z + \hat{\mathbf{e}}_x) + (2\hat{\mathbf{e}}_z + \hat{\mathbf{e}}_y) \times (\hat{\mathbf{e}}_x - 2\hat{\mathbf{e}}_z)$,

(b) $(3\hat{\mathbf{e}}_x - \hat{\mathbf{e}}_z) \times (2\hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_y - 3\hat{\mathbf{e}}_z)$,

gdzie $\hat{\mathbf{e}}_i, (i = x, y, z)$ są wektorami jednostkowymi wzajemnie prostopadłymi i mającymi orientację zgodną z orientacją przestrzeni.

1.13. Proszę sprawdzić tożsamość

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = a^2 b^2.$$

1.14. Proszę wykazać, że dla dowolnych wektorów $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ spełniona jest równość

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{a} + \mathbf{c}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

1.15. Proszę udowodnić następujące tożsamości

(a) $\mathbf{a} \cdot [(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})] = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$,

(b) $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot [(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c})] = 3\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Bartłomiej Spisak