22. 10. 2011

Matematyczne Metody Fizyki I

–

Zestaw 3

3.1. Udowodnij, korzystając z zasady indukcji, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwe są następujące własności:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$,

b) $1 + 5 + 9 + \ldots + (4n+1) = (n+1)(2n+1)$,

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$,

d) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

3.2. Niech $\sigma \in \Pi(3)$, gdzie $\Pi(3)$ jest zbiorem wszystkich 3-elementowych permutacji. Wypisz elementy tego zbioru i podaj jego moc.

3.3. Niech $\sigma_j, \sigma_j \in \Pi(3)$. Oblicz:

a) $\sigma_i \circ \sigma_j$,

b) $\sigma_j \circ \sigma_i$.

Czy działanie „$\circ$"jest przemienne?

3.4. Dana jest permutacja $\sigma \in \Pi(9)$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 6 & 7 & 4 & 1 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) wyznacz permutację odwrotną σ^{-1},

b) oblicz $\sigma \circ \sigma^{-1}$, $\sigma^{-1} \circ \sigma$,

c) wyraź σ za pomocą cykli rozłącznych,

d) wyraź σ za pomocą transpozycji,

Czy permutacja σ jest parzysta?

3.5. W zbiorze permutacji liczb $1, 2, 3, 4, 5, 6$ rozpatrujemy następujące cykle: $\tau_1 = (1364)$, $\tau_2 = (245)$, $\tau_3 = (1246)$. Wyznacz permutację $\tau_2 \tau_1 \tau_3^{-1}$.

3.6. Rozwiąż równanie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} X_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bartłomiej Spisak