

Matematyczne Metody Fizyki I

Zestaw 5

- 5.1.** Liczby zespolone $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$ mogą być reprezentowane przez dwuwymiarowe wektory w postaci $\mathbf{z}_1 = x_1\mathbf{e}_x + y_1\mathbf{e}_y$ i $\mathbf{z}_2 = x_2\mathbf{e}_x + y_2\mathbf{e}_y$. Proszę pokazać, że

$$z_1^* z_2 = \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 + i(\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2) \cdot \mathbf{e}_z,$$

gdzie \mathbf{e}_i jest wersorem w i -tym kierunku, dla $i = x, y, z$.

- 5.2.** Proszę narysować zbiory liczbowe spełniające warunki:

- a) $\arg \{z\} = \pi/4$,
- b) $\pi/6 < \arg \{z + 3i\} < \pi/3$,
- c) $\pi/2 \leq \arg \{(-1 + i)z^3\} \leq \pi$,
- d) $\arg \{i/z\} = 3\pi/4$.

- 5.3.** Proszę obliczyć argumenty główne dla następujących liczb zespolonych: $z = 2$, $z = i$, $z = 5 + 5i$, $z = -1 + i$, $z = 3 - 3i$, $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, a następnie zapisać je w postaci trygonometrycznej i wykładniczej.

- 5.4.** Proszę wyznaczyć część rzeczywistą i część urojoną funkcji $\sin z$ oraz $\cos z$, a następnie sprawdzić dla jakiej wartości $z = x + iy$, funkcja $\sin z = 10$.

- 5.5.** Proszę wykazać, że

$$\left(\frac{1 + itg x}{1 - itg x} \right)^n = \frac{1 + itg nx}{1 - itg nx}.$$

- 5.6.** Proszę zapisać wyrażenia $(1 - \sqrt{3}i)^{2013}$ oraz $\frac{(-\sqrt{3}+i)^5}{(1-i)^2}$ w postaci algebraicznej.

- 5.7.** Proszę obliczyć i narysować podane pierwiastki: $\sqrt{-2i}$, $\sqrt[3]{1 + \sqrt{3}i}$, $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$.

- 5.8.** Proszę wykazać następujące tożsamości:

- a) $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$,
- b*) $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

- 5.9.** Równanie fali świetlnej o częstotliwości kołowej ω ma postać

$$\psi(x, t) = A \exp[-i\omega(t - x/v)],$$

gdzie A jest amplitudą fali, $v = c/n$ jest prędkością rozchodzenia się światła w ośrodku o współczynniku załamania n , a c jest prędkością światła w próżni. Dla niektórych materiałów współczynnik załamania światła można przedstawić w postaci zespolonej, tzn. $n = \alpha + i\beta$. Jaki to ma sens fizyczny?