05. 11. 2009

Matematyczne Metody Fizyki
Zestaw 5
Ćwiczenia 12. 11. 2009
grupa R1IS3

5.1. Sprawdź czy podane działania dwuargumentowe:
a. $x\Diamond y = 2xy$, b. $x\Diamond y = x - y$, c. $x\Diamond y = x^2 + y^2$, d. $x\Diamond y = x^y$,
są łączne w zbiorze liczb całkowitych.

5.2. Wykaż, że zbiór $\mathbb{Z}$ z działaniem $m\Diamond n = m + n + mn$ jest monoidem przemiennym.

5.3. Sprawdź, czy struktura algebraiczna $(\mathbb{A}; \Diamond)$ jest grupą:
a. $(\mathbb{R}, +)$, b. $(\mathbb{R}; \cdot)$, c. $(\mathbb{Z}; +)$, d. $(\mathbb{N}; \cdot)$, e. $(\{-1, 1\}; \cdot)$,
gdzie symbole „$+$" oraz „$\cdot$" oznaczają odpowiednio dodawanie i mnożenie.

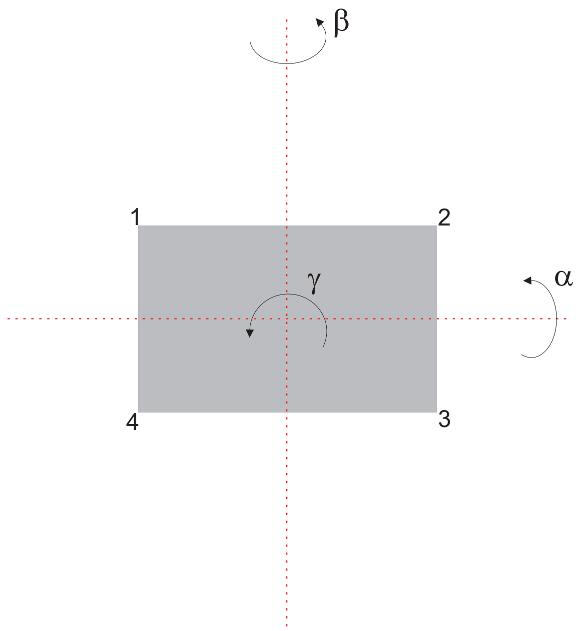
5.4. Wykaż, że $\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3$ i $\forall\ t, t' \in \mathbb{R}$ zbiór transformacji

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} - \mathbf{v}t, \\ t' &= t \end{aligned}$$

jest grupą, jeżeli działaniem grupowym jest składanie przekształceń. Taka transformacja współrzędnych i czasu jest znana w fizyce jako tzw. *szczególna grupa Galileusza.*

5.5. Znajdź postać wyrażenia $f(x) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ po zmianie zmiennej $x \to x + ky$, a następnie pokaż, że wyznacznik jest niezmiennikiem tego przekształcenia.

5.6.* Napisz tabelkę działania dla grupy symetrii prostokąta, przyjmując, że α, β, γ są obrotami wokół odpowiednich osi, jak to przedstawiono na rysunku.
Wskazówka:
Zastosuj permutacje do wierzchołków prostokąta.



5.7. Które z podanych zbiorów są pierścieniami ze względu na *zwykłe* działania dodawania i mnożenia liczb:

a. Zbiór liczb naturalnych.

b. Zbiór funkcji ciągłych określonych w przedziale $[0, 1]$.

5.8. Sprawdź, czy zbiór liczb rzeczywistych z działaniami: addytywnym $x \Box y = x + y + 1$ oraz multiplikatywnym $x \circ y = x + y + xy$ jest ciałem.

5.9. Wykaż, że zbiór $\Omega = \{(x, y) : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ z działaniami:

$$\begin{aligned} (x_i, y_i) \diamondsuit (x_j, y_j) &= (x_i + x_j, y_i + y_j), \\ (x_i, y_i) \circ (x_j, y_j) &= (x_i x_j - y_i y_j, x_i y_j + x_j y_i). \end{aligned}$$

jest ciałem.

B.J. Spisak