

## Matematyczne Metody Fizyki I

-

### Zestaw 6

- 6.1.** Proszę sprawdzić, czy podane działania dwuargumentowe:  
 a.  $x \diamond y = 2xy$ , b.  $x \diamond y = x - y$ , c.  $x \diamond y = x^2 + y^2$ , d.  $x \diamond y = x^y$ ,  
 są łączne w zbiorze liczb całkowitych.
- 6.2.** Proszę wykazać, że zbiór  $\mathbb{Z}$  z działaniem  $m \diamond n = m + n + mn$  jest monoidem przemennym.
- 6.3.** Niech  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1, 0\}$  i niech dla  $i = 1, 2, \dots, 6$  funkcje  $f_i : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}$  będą określone wzorami:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{-x-1}{x}, \quad f_3(x) = \frac{-1}{x+1}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{x}, \quad f_5(x) = \frac{-x}{x+1}, \quad f_6(x) = -x-1.$$

Proszę sprawdzić, że składanie funkcji  $\circ$  jest działaniem wewnętrznym w zbiorze  $V = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ , tzn. zbudować tabelkę dla tego działania oraz sprawdzić, czy struktura algebraiczna  $\{V, \circ\}$  jest grupą.

- 6.4.** Wykaż, że  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3$  i  $\forall t, t' \in \mathbb{R}$  zbiór transformacji

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} - \mathbf{v}t, \\ t' &= t \end{aligned}$$

jest grupą, jeżeli działaniem grupowym jest składanie przekształceń. Taka transformacja współrzędnych i czasu jest znana w fizyce jako tzw. *szczególna grupa Galileusza*.

- 6.5.** Znajdź postać wyrażenia  $f(x) = ax^2 + 2bxy + cy^2$  po zmianie zmiennej  $x \rightarrow x + ky$ , a następnie pokaż, że wyznacznik jest niezmiennikiem tego przekształcenia.

**Wskazówka:**

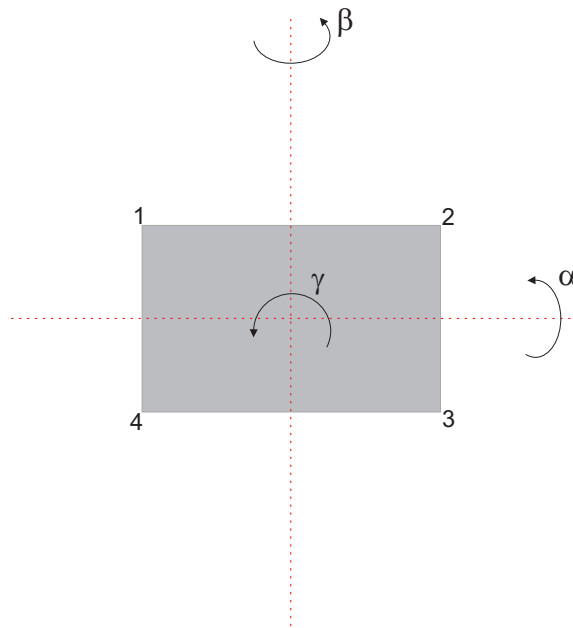
Funkcja  $f(x)$  jest niezmiennicza względem przekształcenia  $\hat{U}$  jej argumentu, jeżeli po przekształceniu argumentu wartość funkcji nie ulegnie zmianie, tzn.

$$f(x) = f(\hat{U}x).$$

**6.6.** Napisz tabelkę działania dla grupy symetrii prostokąta, przyjmując, że  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  są obrotami wokół odpowiednich osi, jak to przedstawiono na rysunku.

**Wskazówka:**

Zastosuj permutacje do wierzchołków prostokąta.



*Bartłomiej Spisak*