

Matematyczne Metody Fizyki zółw
Zestaw 6
ćwiczenia 26. 11. 2009
grupa R1IS3

6.1. Dana jest macierz

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 + 3i & 1 - i & 5i \\ 1 + i & 6 - i & 1 + 3i \\ 5 - 6i & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Znajdź: \hat{A}^* , \hat{A}^T , \hat{A}^\dagger .

6.2. Dla jakich wartości x macierz

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4 & x + 2 \\ 2x - 3 & x + 1 \end{bmatrix}$$

jest symetryczna?

6.3. Pokaż, że

a. $(\hat{A} + \hat{B})(\hat{A} - \hat{B}) = \hat{A}^2 - \hat{B}^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$,

b. $[\hat{A}, \hat{B}^{-1}] = -\hat{B}^{-1}[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{-1}$, zakładając, że $\det \hat{B} \neq 0$,

b. $\hat{B} = (\hat{C}\hat{A})^{-1}$, jeżeli wiadomo, że $\hat{A}\hat{B}\hat{C} = \hat{I}$.

6.4. Oblicz wartość wielomianu

$$f(\hat{X}) = \hat{X}^3 - 2\hat{X}^2 + \hat{I},$$

gdzie macierz \hat{X} ma postać

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.5. Spinowe macierze Pauliego mają postać:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \hat{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pokaż, że

$$\hat{\sigma}_i^2 = \hat{I}, \quad \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j = i \epsilon_{ijk} \hat{\sigma}_k, \quad \{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j\} = 2\delta_{ij},$$

gdzie ϵ_{ijk} jest symbolem Levi-Civita, natomiast δ_{ij} jest symbolem Kroneckera.

6.6. Znajdź macierz odwrotną do macierzy

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

stosując metodę operacji elementarnych.

6.7. Zapisz, funkcję $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey$ w postaci macierzowej, tzn. $f(x, y) = \mathbf{x}^T \hat{A} \mathbf{x} + \hat{B} \mathbf{x}$, gdzie $\mathbf{x} = [x \ y]$.

6.8. Rozwiąż równanie macierzowe

$$\hat{X} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\hat{X} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

i układ równań macierzowych

$$\begin{cases} \hat{X} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \hat{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \hat{X} + \hat{Y} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$