30. 11. 2012

Matematyczne Metody Fizyki I

—

Zestaw 7

7.1. Dana jest macierz

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2+3i & 1-i & 5i \\ 1+i & 6-i & 1+3i \\ 5-6i & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Znajdź: $\hat{\mathbf{A}}^*$, $\hat{\mathbf{A}}^T$, $\hat{\mathbf{A}}^\dagger$.

7.2. Dla jakich wartości x macierz

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 4 & x+2 \\ 2x-3 & x+1 \end{bmatrix}$$

jest symetryczna?

7.3. Jaki warunek powinny spełniać macierze $\hat{\mathbf{A}}$ oraz $\hat{\mathbf{B}}$, aby zachodziła równość $(\hat{\mathbf{A}}+\hat{\mathbf{B}})(\hat{\mathbf{A}}-\hat{\mathbf{B}}) = \hat{\mathbf{A}}^2 - \hat{\mathbf{B}}^2$?

7.4. Oblicz wartość wielomianu

$$f\big(\hat{\mathbf{X}}\big) = \hat{\mathbf{X}}^3 - 2\hat{\mathbf{X}}^2 + \hat{\mathbb{1}},$$

gdzie macierz $\hat{\mathbb{1}}$ jest macierzą jednostkową, a $\hat{\mathbf{X}}$ ma postać

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7.5. Spinowe macierze Pauliego mają postać:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pokaż, że

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i^2 = \hat{\mathbb{1}}, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j = i\epsilon_{ijk}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_k, \quad \{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j\} = 2\delta_{ij}\hat{\mathbb{1}},$$

gdzie ϵ_{ijk} jest symbolem Levi-Civity, natomiast δ_{ij} jest symbolem Kroneckera.

7.6. Rozwiąż równanie macierzowe

$$\hat{\mathbf{X}} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{X}} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

i układ równań macierzowych

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{X}} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\hat{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\hat{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Bartłomiej Spisak