

Matematyczne Metody Fizyki I

-

Zestaw 7

7.1. Dana jest macierz

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 + 3i & 1 - i & 5i \\ 1 + i & 6 - i & 1 + 3i \\ 5 - 6i & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Proszę rozłożyć macierz $\hat{\mathbf{A}}$ na składową hermitowską i antyhermitowską.

7.2. Proszę sprawdzić, dla jakich wartości x macierz

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 4 & x + 2 \\ 2x - 3 & x + 1 \end{bmatrix}$$

jest symetryczna?

7.3. Proszę obliczyć wartość wielomianu

$$f(\hat{\mathbf{X}}) = \hat{\mathbf{X}}^3 - 2\hat{\mathbf{X}}^2 + \hat{\mathbf{I}},$$

gdzie $\hat{\mathbf{I}}$ jest macierzą jednostkową, natomiast macierz $\hat{\mathbf{X}}$ ma postać

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7.4. Proszę wykazać, że jeżeli $\hat{\mathbf{A}} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ i spełnione jest równanie

$$\hat{\mathbf{A}}^2 + \hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{O}},$$

to istnieje macierz odwrotna. Jaka jest postać tej macierzy?

7.5. Proszę znaleźć macierz odwrotną do macierzy

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

stosując metodę operacji elementarnych.

7.6. Proszę rozwiązać równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & 9 \\ 7 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

7.7. Proszę obliczyć wyznacznik macierzy

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

stosując metodę:

- a) permutacyjną,
- b) Laplace'a.

7.8. Proszę znaleźć miejsca zerowe wielomianu

$$f(x) = \det \begin{bmatrix} x-2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix}.$$

7.9. Proszę znaleźć macierz odwrotną do macierzy:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

metodą dopełnień algebraicznych.

7.10. Proszę pokazać, że

- a) $(\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}})(\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}) = \hat{\mathbf{A}}^2 - \hat{\mathbf{B}}^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}] = \hat{\mathbf{0}}$,
- b) $[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}^{-1}] = -\hat{\mathbf{B}}^{-1}[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]\hat{\mathbf{B}}^{-1}$, zakładając, że $\det \hat{\mathbf{B}} \neq 0$,
- b) $\hat{\mathbf{B}} = (\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}})^{-1}$, jeżeli wiadomo, że $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{I}}$.

7.11. Macierze $\hat{\mathbf{G}}$ i $\hat{\mathbf{G}}_0$ są zdefiniowane równaniami:

$$[\varepsilon\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{H}}_0 - \hat{\mathbf{V}}]\hat{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{I}} \quad \text{i} \quad [\varepsilon\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{H}}_0]\hat{\mathbf{G}}_0 = \hat{\mathbf{I}},$$

gdzie $\varepsilon \in \mathbb{C}$. Proszę wykazać, że macierz $\hat{\mathbf{G}}$ spełnia równanie w postaci

$$\hat{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{G}}_0 + \hat{\mathbf{G}}_0\hat{\mathbf{V}}\hat{\mathbf{G}}.$$

7.12. Spinowe macierze Pauliego mają postać:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Proszę pokazać, że

$$\hat{\sigma}_i^2 = \hat{\mathbf{I}}, \quad \hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j = i\epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k, \quad \{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j\} = 2\delta_{ij},$$

gdzie ϵ_{ijk} jest symbolem Levi-Civiti, natomiast δ_{ij} jest symbolem Kroneckera.

7.13.* Niech \hat{U} jest macierzą unitarną o wymiarze 2×2 , taką że

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

gdzie $\det \hat{U} = 1$.

Proszę pokazać, że $a^* = d$, $b = -c^*$ oraz $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

7.14.* Proszę obliczyć $\hat{U}(\phi) = \exp [i\phi \mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}/2]$, gdzie $\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]$ jest wersorem, ϕ jest liczbą rzeczywistą, a $\hat{\sigma}_i$ są macierzami Pauliego.

Wskazówka:

Skorzystać z przedstawienia funkcji wykładniczej oraz trygonometrycznych za pomocą szeregów.

Bartłomiej Spisak