13. 12. 2012

Matematyczne Metody Fizyki I

–

Zestaw 9

9.1. Oblicz wyznacznik macierzy

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

stosując metodę Laplace'a.

9.2. Znajdź miejsca zerowe wielomianu

$$f(x) = \det \begin{bmatrix} x-2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix}.$$

9.3. Stosując twierdzenie Cauchy'ego do macierzy

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ -bt & a \end{bmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} c & d \\ -dt & c \end{bmatrix}$$

udowodnij tożsamość

$$(a^2 + b^2 t)(c^2 + d^2 t) = (ac - bdt)^2 + (ad + bc)^2 t,$$

gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

9.4. Znajdź macierz odwrotną do macierzy

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

w oparciu o metodę dopełnień algebraicznych:

$$\hat{C}^{-1} = \frac{1}{\det \hat{C}} \left(\hat{C}^D\right)^T.$$

9.5. Niech $\hat{\mathbf{U}}$ jest macierzą unitarną o wymiarze 2×2, taką że

$$\hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

gdzie $\det \hat{\mathbf{U}} = 1$.
Pokaż, że $a^* = d$, $b = -c^*$ oraz $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

9.6. Oblicz $\hat{U}(\phi) = \exp\left[i\phi \mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}/2\right]$, gdzie $\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]$ jest wersorem, ϕ jest liczbą rzeczywistą, a $\hat{\sigma}_{\mathbf{i}}$ są macierzami Pauliego.
Wskazówka:
Skorzystać z przedstawienia funkcji wykładniczej oraz trygonometrycznych za pomocą szeregów.

Bartłomiej Spisak