20. 01. 2014

Matematyczne Metody Fizyki I

Zestaw 9

9.1. Proszę sprawdzić, które z podanych przekształceń: $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest liniowe

a) $(x_1, x_2) \longrightarrow (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, x_1)$,

b) $(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (x_1 x_2, x_1, x_1)$,

c) $(x_1, x_2) \longrightarrow (2x_1 - x_2, x_1 + 1, x_2 - 1)$.

9.2. Proszę wyznaczyć macierz przekształcenia liniowego $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ określonego wzorem:

a) $(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (4x_1 + 5x_2 + 6x_3, x_1 + 7x_2 + 8x_3)$,

b) $(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (x_1 + x_3, 9x_1 - 2x_2)$.

w bazach kanonicznych.

9.3. Proszę wyznaczyć jądro i obraz przekształcenia liniowego $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

a) $(x_1, x_2) \longrightarrow (2x_1 - x_2, -6x_1 + 3x_2)$,

b) $(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (x_1 - 2x_2 + 3x_3, x_1 - 2x_2 + 3x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,

c) $(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_1)$.

9.4. Przekształcenie liniowe $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ jest określone wzorem $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2 - x_3)$. Proszę wyznaczyć macierz tego przekształcenia liniowego w bazach $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$.
Baza $\mathcal{B}$ składa się z wektorów: $\{(2, -1, 0), (1, 3, 2), (0, 4, 1)\}$, natomiast baza $\mathcal{B}'$ z wektorów $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

9.5. Proszę znaleźć macierz przejścia od bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{B}'$, jeżeli baza $\mathcal{B}$ składa się z wektorów $\{(1, 2, 3), (1, 3, 4), (1, 5, 7)\}$, a baza $\mathcal{B}'$ $\{(2, 3, 4), (4, 4, 5), (6, 3, 4)\}$.

9.6. Proszę wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy przekształcenia liniowego

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

9.7. Proszę znaleźć macierz podobną do macierzy

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

9.8. Proszę wyznaczyć macierz formy kwadratowej

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2x_3$$

9.9. Proszę zbadać określoność formy kwadratowej

a) $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3$,

b) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$,

stosując kryterium Sylvestera.

9.10. Proszę znaleźć postać kanoniczną formy kwadratowej

a) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 21x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$,

b) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$,

stosując metodę Lagrange'a.

9.11. Proszę sprawdzić, czy forma $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określona wzorem

a) $\varphi[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$,

b) $\varphi[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = 3x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2$.

jest iloczynem skalarnym w przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

9.12. Proszę zortogonalizować podane wektory: $\mathbf{a} = (1, -2, 0), \mathbf{b} = (5, 5, 1), \mathbf{c} = (5, 4, 4)$ metodą Grama-Schmidta w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Bartłomiej Spisak