13. 01. 2016

Wybrane zagadnienia teoretyczne do egzaminu z matematycznych metod fizyki I

–

I. Elementy teorii mnogości i liczb

1. Podaj cantorowskie określenie zbioru.

2. Podaj definicje podstawowych działań na zbiorach oraz zilustruj je graficznie za pomocą diagramów Venna.

3. Podaj kryterium pozwalające określić diagram Venna?

4. Podaj definicję permutacji n-elementowej oraz omów składanie permutacji, rozkład na cykle rozłączne, rozkład na transpozycje, odwracanie permutacji.

5. Zasada indukcji matematycznej.

II. Liczby zespolone

1. Podaj definicję liczby zespolonej i określ działania dodawania (odejmowania), mnożenia (dzielenia) w tym zbiorze liczbowym.

2. Podaj definicję sprzężenia zespolonego, modułu, argumentu liczby zespolonej oraz wymień ich własności.

3. Podaj postać algebraiczną, trygonometryczną i wykładniczą liczb zespolonych oraz podaj związki między nimi.

4. Podaj interpretację geometryczną liczb zespolonych (płaszczyzna Gaussa, diagram Arganda).

5. Podaj definicję naturalnej potęgi o wykładniku naturalnym i pierwiastka z liczby zespolonej wraz z interpretacją geometryczną, wzór de Moivre'a, sformułujzasadnicze twierdzenie algebry.

III. Podstawowe struktury algebraiczne

1. Podaj definicję działania dwuargumentowego wewnętrznego.

2. Wymień podstawowe własności działań dwuargumentowych.

3. Sformułuj i udowodnij twierdzenie o jednoznaczności elementu symetrycznego w zbiorze, w którym działanie wewnętrzne jest łączne i istnieje element neutralny.

4. Podaj definicję półgrupy, monoidu, grupy, pierścienia i ciała.

5. Sformułuj i udowodnij twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania równania $a_i \diamond x = a_j$ w grupie przemiennej.

6. Podaj definicję przekształcenia symetrii oraz niezmiennika grupy przekształceń.

IV. Macierze i algebra macierzowa

1. Podaj definicję macierzy i określ podstawowe działania na nich (dodawanie, odejmowanie, mnożenie przez liczbę, iloczyny: Cayleya, Liego, Jordana i związek między nimi).
2. Podaj definicję macierzy: symetrycznej, antysymetrycznej, hermitowskiej, antyhermitowskiej, idempotentnej, nilpotentnej.
3. Sformułuj twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności macierzy odwrotnej.
4. Sformułuj i udowodnij twierdzenie o przemienności operacji odwracania i transponowania macierzy.
5. Sformułuj i udowodnij twierdzenie o odwracalności iloczynu macierzy.
6. Sformułuj i udowodnij twierdzenie o rozkładzie macierzy na sumę macierzy symetrycznej i antysymetrycznej.
7. Omów algorytmy odwracania macierzy.

V. Wyznacznik i ślad macierzy

1. Podaj definicję wyznacznika n-tego stopnia i wymień jego podstawowe własności.
2. Wymień sposoby obliczania wyznaczników niskich stopni (do 3-go włącznie) oraz pokaż jak obliczać wyznaczniki stopnia $n > 3$ (rozwinięcie Laplace'a).

VI. Układy równań liniowych

1. Podaj definicję układów równań liniowych
2. Podaj definicję układu Cramera oraz sformułuj twierdzenie Kroneckera-Capellego wraz z wnioskami z niego wynikającymi.

VII. Przestrzenie liniowe

1. Podaj definicję przestrzeni liniowej.
2. Podaj definicję kombinacji liniowej wektorów. Kiedy wektory nazywamy liniowo zależnymi, a kiedy liniowo niezależnymi?
3. Podaj definicję bazy w skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej.
4. Sformułuj i udowodnij twierdzenie o jednoznaczności przedstawienia wektora względem wybranej bazy.

VIII. Przekształcenia liniowe

1. Podaj definicję przekształcenia liniowego i omów podstawowe działania na tych przekształceniach.

2. Skonstruuj macierz przekształcenia liniowego.

3. Podaj definicję jądra i obrazu przekształcenia liniowego.

4. Omów procedurę znajdowania wartości własnych i wektorów własnych.

5. Podaj definicję transformacji podobieństwa.

IX. Rzeczywiste przestrzenie z iloczynem skalarnym

1. Podaj definicję formy dwuliniowej, kwadratowej.

2. Sformułuj twierdzenie Lagrange'a sprowadzaniu formy kwadratowej do postaci diagonalnej.

3. Podaj definicje długości wektora, iloczynu skalarnego, iloczynu wektorowego, iloczynu mieszanego wraz z ich interpretacjami geometrycznymi.

4. Sformułuj i udowodnij twierdzenie o ortogonalizacji wektorów.

Bartłomiej Spisak