05. 10. 2017

Matematyczne Metody Fizyki I

grupa: fizyka medyczna

Zestaw 1

1.1. Wektor o współrzędnych $a_x = 3$, $a_y = -4$, $a_z = 5$ ma początek w punkcie $\mathcal{P}(2, -2, 5)$. Proszę znaleźć współrzędne punktu końcowego $\mathcal{Q}(x_Q, y_Q, z_Q)$.

1.2. Dane są trzy wektory: $\mathbf{a} = (1, -1)$, $\mathbf{b} = (4, 3)$, $\mathbf{c} = (-10, -11)$. Proszę znaleźć współczynniki α i β, które spełniają równanie wektorowe w postaci:

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}.$$

1.3. Proszę obliczyć kąt między wektorami $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z$ i $\mathbf{b} = 13\mathbf{e}_x - 6\mathbf{e}_y + 8\mathbf{e}_z$, gdzie $\mathbf{e}_i$ jest wersorem wzdłuż osi 0–i.

1.4. Proszę obliczyć kąt między wektorami $\mathbf{p} = 6\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ i $\mathbf{q} = 2\mathbf{m} + 10\mathbf{n}$, jeżeli wiadomo, że $\mathbf{m}$ i $\mathbf{n}$ są wektorami jednostkowymi wzajemnie prostopadłymi.

1.5. Jaki warunek muszą spełniać współrzędne punktu $\mathcal{A}(x, y, z)$, aby wektor łączący początek układu $\mathcal{O}$ z punktem $\mathcal{B}(2, 3, -5)$ był prostopadły do wektora $\mathcal{BA}$.

1.6. Dla jakiej wartości parametru λ wektory $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} + \lambda\mathbf{q}$ oraz $\mathbf{b} = -\mathbf{p} + 2\mathbf{q}$ są wzajemnie prostopadłe, jeżeli wiadomo, że $p = 5$, $q = 3$ oraz $\measuredangle(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (2/3)\pi$.

1.7. Dane są trzy wektory $\mathbf{a} = (3, y, z)$, $\mathbf{b} = (1, 3, 2)$ i $\mathbf{c} = (2, -4, -1)$. Proszę wyznaczyć wartości y i z dla których wektor $\mathbf{a}$ jest prostopadły do wektorów $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$.

1.8. Proszę znaleźć rzut wektora $\mathbf{a} = (2, -1, 2)$ na kierunek wektora $\mathbf{b} = (1, 2, -2)$.

1.9. Proszę znaleźć cosinusy kierunkowe wektora $\mathbf{a} = (1, -1, 2)$.

1.10. Dane są wektory $\mathbf{a} = (1, 3, 3)$, $\mathbf{b} = (0, 3, -4)$ i $\mathbf{c} = (1, 2, -1)$. Proszę przeanalizować poniższy wzór i wskazać błędy w nim występujące, a następnie znaleźć długość wektora

$$\mathbf{d} = 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} + \frac{1}{25} b^2 a + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}\mathbf{a}.$$

1.11. W punkcie $A = [3, -1, 5]$ przyłożono siłę $\mathbf{F} = [2, 5, -4]$. Proszę wyznaczyć moment tej siły względem punktu $B = [1, -2, 3]$.

1.12. Dane są wektory $\mathbf{a} = [3, -1, -2]$, $\mathbf{b} = [1, 2, -1]$. Proszę znaleźć współrzędne wektora $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{b}$.

1.13. Proszę uprościć wyrażenia

(a) $\hat{\mathbf{e}}_x \times (2\hat{\mathbf{e}}_y - \hat{\mathbf{e}}_z + \hat{\mathbf{e}}_x) + (2\hat{\mathbf{e}}_z + \hat{\mathbf{e}}_y) \times (\hat{\mathbf{e}}_x - 2\hat{\mathbf{e}}_z)$,

(b) $(3\hat{\mathbf{e}}_x - \hat{\mathbf{e}}_z) \times (2\hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_y - 3\hat{\mathbf{e}}_z)$,

gdzie $\hat{\mathbf{e}}_i, (i = x, y, z)$ są wektorami jednostkowymi wzajemnie prostopadłymi i mającymi orientację zgodną z orientacją przestrzeni.

1.14. Proszę sprawdzić tożsamość

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = a^2 b^2.$$

1.15. Proszę wykazać, że dla dowolnych wektorów $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ spełniona jest równość

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{a} + \mathbf{c}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

1.16. Proszę udowodnić następujące tożsamości

(a) $\mathbf{a} \cdot [(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})] = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$,

(b) $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot [(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c})] = 3\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Bartłomiej Spisak, Paweł Wójcik