16. 10. 2015

Matematyczne Metody Fizyki I
grupa: fizyka medyczna

Zestaw 2

2.1. Dane są wektory $\mathbf{a} = (3, -1, -2)$, $\mathbf{b} = (1, 2, -1)$. Proszę znaleźć współrzędne wektora $(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{b}$.

2.2. Proszę sprawdzić czy iloczyn wektorowy wektorów $\mathbf{a} = (r \sin \omega t, 0, r \cos \omega t)$, $\mathbf{b} = (-r \cos \omega t, 0, r \sin \omega t)$ zmienia się w czasie.

2.3. Proszę uprościć wyrażenia

(a) $\mathbf{e}_x \times (2\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_x) + (2\mathbf{e}_z + \mathbf{e}_y) \times (\mathbf{e}_x - 2\mathbf{e}_z)$,

(b) $(3\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z) \times (2\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - 3\mathbf{e}_z)$,

gdzie $\mathbf{e}_i, (i = x, y, z)$ są wektorami jednostkowymi wzajemnie prostopadłymi i mającymi orientację zgodną z orientacją przestrzeni.

2.4. Wektor $\mathbf{x}$ spełnia dwa równania: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 1$ i $\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$, gdzie $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są stałymi wektorami. Proszę rozwiązać ten układ równań ze względu na wektor $\mathbf{x}$.
Wskazówka: Tożsamość: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

2.5. W punkcie $\mathcal{A}(3, -1, 5)$ przyłożono siłę $\mathbf{F} = (2, 5, -4)$. Proszę wyznaczyć moment tej siły względem punktu $\mathcal{B}(1, -2, 3)$ oraz jej wartość.

2.6. Proszę obliczyć objętość komórki elementarnej w krysztale soli kuchennej, która jest wyznaczona przez wektory: $\mathbf{a} = (\ell, \ell, -\ell)$, $\mathbf{b} = (-\ell, \ell, \ell)$ i $\mathbf{c} = (\ell, -\ell, \ell)$, gdzie $\ell = 3 \times 10^3$ m.

2.7. Proszę wyrazić wektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ w postaci $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$, zakładając, że wektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ nie są współpłaszczyznowe (koplanarne).
Wskazówka: Do uproszczenia wyniku można zastosować tożsamość Lagrange'a

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}).$$

2.8. Równanie ruchu dwóch punktów obserwowanych z danego układu współrzędnych wyglądają następująco

$$\mathbf{r}_1(t) = (0, 2, 0) + (3, 1, 2)t + (1, 1, 0)t^2 \quad \text{i} \quad \mathbf{r}_2(t) = (1, 0, 1) + (0, 2, 1)t.$$

Proszę znaleźć prędkość i przyspieszenie punktu drugiego względem pierwszego.

2.9. Cząstka o masie m i ładunku q porusza się w polu magnetycznym o indukcji magnetycznej $\mathbf{B}$ pod wpływem siły Lorentza: $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Proszę pokazać, że prędkość cząstki $\mathbf{v}$ jest stała.

2.10. Cząstka o masie m porusza się z prędkością $\mathbf{v}$ w polu siły $\mathbf{F} = -f(r)\mathbf{r}$. Proszę pokazać, że orbitalny moment pędu $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v})$ jest stały.

2.11. Cząstka o masie m porusza się w polu siły $\mathbf{F} = (1, 2, 3)$ N. Proszę znaleźć prędkość i położenie tej cząstki w dowolnej chwili t, jeżeli wiadomo, że w chwili początkowej $t = 0$ znajdowała się ona w punkcie $\mathbf{r}(0) = (1, 1, 1)$ i miała prędkość $\mathbf{v}(0) = (1, 1, 1)$.

Bartłomiej Spisak