

Matematyczne Metody Fizyki I
grupy: fizyka medyczna i mikro i nanotechnologie w biofizyce

Zestaw 4

4.1. Proszę narysować na osi liczbowej zbiory: $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$, $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$, $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$, jeżeli wiadomo, że

a) $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 4\}$, $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$,

b) $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 1\}$, $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 4\}$.

4.2. Dane są zbiory liczbowe: $\mathbb{A} = \{1, 3, 5\}$ i $\mathbb{B} = \{2, 5, 7, 9\}$. Wypisz wszystkie elementy zbioru:

a) $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$,

b) $\mathbb{B} \times \mathbb{A}$,

Czy $\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \mathbb{B} \times \mathbb{A}$?

4.3. Proszę udowodnić, korzystając z zasady indukcji matematycznej, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwe są następujące własności:

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$,

b) $1 + 5 + 9 + \dots + (4n + 1) = (n + 1)(2n + 1)$,

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$,

d) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$,

e) $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$, gdzie i jest jednostką urojoną.

4.4. Niech $\sigma \in \Pi(3)$, gdzie $\Pi(3)$ jest zbiorem wszystkich 3-elementowych permutacji. Proszę wypisać elementy tego zbioru i podać jego moc.

4.5. Niech $\sigma_j, \sigma_i \in \Pi(3)$. Proszę obliczyć:

a) $\sigma_i \circ \sigma_j$,

b) $\sigma_j \circ \sigma_i$.

4.6. Dana jest permutacja $\sigma \in \Pi(9)$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 6 & 7 & 4 & 1 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proszę:

- a) wyznaczyć permutację odwrotną σ^{-1} ,
- b) obliczyć $\sigma \circ \sigma^{-1}$, $\sigma^{-1} \circ \sigma$,
- c) wyrazić σ za pomocą cykli rozłącznych,
- d) wyrazić σ za pomocą transpozycji,

Czy permutacja σ jest parzysta?

4.7. W zbiorze permutacji liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6 rozpatrujemy następujące cykle: $\tau_1 = (1364)$, $\tau_2 = (245)$, $\tau_3 = (1246)$. Proszę wyznaczyć permutację $\tau_2\tau_1\tau_3^{-1}$.

4.8. Proszę rozwiązać równanie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} X_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

B. Spisak, P. Wójcik, D. Woźniak