

## Matematyczne Metody Fizyki I grupa: fizyka medyczna

### Zestaw 6

- 6.1.** Liczby zespolone  $z_1 = x_1 + iy_1$  i  $z_2 = x_2 + iy_2$  mogą być reprezentowane przez dwuwymiarowe wektory w postaci  $\mathbf{z}_1 = x_1\mathbf{e}_x + y_1\mathbf{e}_y$  i  $\mathbf{z}_2 = x_2\mathbf{e}_x + y_2\mathbf{e}_y$ . Proszę pokazać, że

$$z_1^* z_2 = \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 + i(\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2) \cdot \mathbf{e}_z,$$

gdzie  $\mathbf{e}_i$  jest wersorem w  $i$ -tym kierunku, dla  $i = x, y, z$ .

- 6.2.** Proszę obliczyć argumenty główne dla następujących liczb zespolonych:  $z = 2$ ,  $z = i$ ,  $z = 5 + 5i$ ,  $z = -1 + i$ ,  $z = 3 - 3i$ ,  $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ , a następnie zapisać je w postaci trygonometrycznej i wykładniczej.
- 6.3.** Proszę wyznaczyć część rzeczywistą i część urojoną funkcji  $\sin z$  oraz  $\cos z$ , a następnie sprawdzić dla jakiej wartości  $z = x + iy$ , funkcja  $\sin z = 10$ .
- 6.4.** Proszę obliczyć i narysować podane pierwiastki:  $\sqrt{-2i}$ ,  $\sqrt[3]{1 + \sqrt{3}i}$ ,  $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$ .
- 6.5.** Proszę wykazać następujące tożsamości:
- a)  $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$ ,
- b\*)  $\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$ .
- 6.6.** Równanie fali świetlnej o częstotliwości kołowej  $\omega$  ma postać

$$\psi(x, t) = A \exp[-i\omega(t - x/v)],$$

gdzie  $A$  jest amplitudą fali,  $v = c/n$  jest prędkością rozchodzenia się światła w ośrodku o współczynniku załamania  $n$ , a  $c$  jest prędkością światła w próżni. Dla niektórych materiałów współczynnik załamania światła można przedstawić w postaci zespolonej, tzn.  $n = \alpha + i\beta$ . Jaki to ma sens fizyczny?

- 6.7.** Proszę znaleźć *rozwiązanie ogólne* dla jednowymiarowego oscylatora harmonicznego z tłumieniem. Dla niezbyt dużych prędkości siłę oporu można wyrazić wzorem

$$F = -\gamma v(t),$$

gdzie  $\gamma/(2m)$  jest współczynnikiem tłumienia,  $v(t)$  jest prędkością.