30. 11. 2018

Matematyczne Metody Fizyki I
grupa: fizyka medyczna

Zestaw 6

6.1. Liczby zespolone $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$ mogą być reprezentowane przez dwuwymiarowe wektory w postaci $\mathbf{z}_1 = x_1\mathbf{e}_x + y_1\mathbf{e}_y$ i $\mathbf{z}_2 = x_2\mathbf{e}_x + y_2\mathbf{e}_y$. Proszę pokazać, że

$$z_1^* z_2 = \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 + i(\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2) \cdot \mathbf{e}_z,$$

gdzie $\mathbf{e}_i$ jest wersorem w i-tym kierunku, dla $i = x, y, z$.

6.2. Proszę obliczyć argumenty główne dla następujących liczb zespolonych: $z = 2$, $z = i$, $z = 5 + 5i$, $z = -1 + i$, $z = 3 - 3i$, $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, a następnie zapisać je w postaci trygonometrycznej i wykładniczej.

6.3. Proszę narysować zbiory liczbowe spełaniające warunki:

a) $\arg(z + i) = \pi$,

b) $\pi/6 \leq \arg(z + 2 + i) \leq \pi$,

c) $\pi/4 \leq \arg z^* \leq 3\pi/4$,

d) $|\pi - \arg(z + 2 + i)| \geq 3\pi/4$.

6.4. Proszę wyznaczyć część rzeczywistą i część urojoną funkcji $\sin z$ oraz $\cos z$, a następnie sprawdzić dla jakiej wartości $z = x + iy$, funkcja $\sin z = 10$.

6.5. Proszę obliczyć i narysować podane pierwiastki: $\sqrt{-2i}$, $\sqrt[3]{1 + \sqrt{3}i}$, $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$.

6.6. Proszę wykazać następujące tożsamości:

a) $2 \sin\alpha \cos\beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$,

b*) $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$.

6.7. Równanie fali świetlnej o częstości kołowej ω ma postać

$$\psi(x, t) = A \exp\left[-i\omega(t - x/v)\right],$$

gdzie A jest amplitudą fali, $v = c/n$ jest prędkością rozchodzenia się światła w ośrodku o współczynniku załamania n, a c jest prędkością światła w próżni. Dla niektórych materiałów współczynnik załamania światła można przedstawić w postaci zespolonej, tzn. $n = \alpha + i\beta$. Jaki to ma sens fizyczny?

6.8. Proszę przeprowadzić dyskusję rozwiązań zwyczajnego równania różniczkowego liniowego drugiego rzędu o stałych współczynnikach w postaci

$$ry''(x) + py'(x) + qy(x) = 0,$$

w zależności od stałych r, p, q. Dla każdego rozważanego przypadku proszę wypisać jawną postać rozwiązania ogólnego.
Wskazówka: Do rozwiązania równania różniczkowego należy zastosować podstawienie

$$y(x) = Ae^{\alpha x},$$

gdzie A oraz α są stałymi.

6.9. Proszę wykazać, że równanie charakterystyczne odpowiadające równaniu Cauchy'ego-Eulera

$$x^2y''(x) + pxy'(x) + qy(x) = 0,$$

ma postać

$$\alpha^2 + (p-1)\alpha + q = 0.$$

Proszę przedyskutować rozwiązania tego równania w przypadku, gdy:

a) pierwiastki równania charakterystycznego są dwoma różnymi liczbami rzeczywistymi,

b) pierwiastki równania charakterystycznego są liczbami zespolonymi.

Wskazówka: Do rozwiązania równania różniczkowego należy zastosować podstawienie

$$y(x) = Ax^{\alpha},$$

gdzie A oraz α są stałymi.

6.10. Proszę znaleźć *rozwiązanie ogólne* dla jednowymiarowego oscylatora harmonicznego z tłumieniem. Dla niezbyt dużych prędkości siłę oporu można wyrazić wzorem

$$F = -\gamma v(t),$$

gdzie $\gamma/(2m)$ jest współczynnikiem tłumienia, $v(t)$ jest prędkością.

6.11. Niech $q_1 = (w_1, x_1, y_1, z_1)$, $q_2 = (w_2, x_2, y_2, z_2)$ są dowolnymi liczbami hiperzespolonymi (kwaternionami). Proszę wykazać, że działania: dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielania są działaniami wewnętrznymi w zbiorze kwaternionów.
Wskazówka: Przy dyskusji mnożenia i dzielenia kwaternionów należy skorzystać z tabeli działania dla mnożenia kwaternionów (por. wykład).
Sprzężeniem zespolonym kwaternionu $q = (w, x, y, z)$ nazywamy kwaternion q^* taki, że

$$q^* = (w, -x, -y, -z).$$

6.12.* Dla bardzo wytrwałych!

Kwaternion q_i można zapisać jako

$$q_i = (w_i, x_i, y_i, z_i) = w_i\mathbf{1} + x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k} \equiv w_i\mathbf{1} + \mathbf{q}_i$$

Zakładając, że kwaternion jest czysto urojony, tzn. $w_i = 0$, proszę wykazać że

$$q_1 q_2 = -\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2.$$

Jaki wynika z tego wniosek?

Bartłomiej Spisak