

**Matematyczne Metody Fizyki I**  
**grupy: fizyka medyczna i mikro i nanotechnologie w biofizyce**

**Zestaw 7**

**7.1.** Proszę sprawdzić, czy podane działania dwuargumentowe:

a)  $x \diamond y = 2xy$ , b)  $x \diamond y = x - y$ , c)  $x \diamond y = x^2 + y^2$ , d)  $x \diamond y = x^y$ ,  
są łączne w zbiorze liczb całkowitych.

**7.2.** Proszę wykazać, że zbiór  $\mathbb{Z}$  z działaniem  $m \diamond n = m + n + mn$  jest monoidem przemiennym.

**7.3.** W zbiorze  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  określono działanie  $*$  w następujący sposób:

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} : (a, b) * (c, d) = (ac, ad + b),$$

Proszę:

- a) obliczyć  $(1, 2) * (1, 1)$ ,
- b) sprawdzić, czy działanie  $*$  jest przemienne,
- c) sprawdzić, czy działanie  $*$  jest łączne,
- d) sprawdzić, czy element  $(1, 2)$  jest elementem neutralnym,
- e) wskazać element symetryczny do elementu  $(1, 2)$
- f) sprawdzić, czy struktura algebraiczna  $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}; *)$  jest grupą.

**7.4.** Niech  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  i niech dla  $i = 1, 2, \dots, 4$  funkcje  $f_i : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}$  będą określone wzorami:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = -x, \quad f_3(x) = \frac{1}{x}, \quad f_4(x) = -\frac{1}{x}.$$

Proszę sprawdzić, że składanie funkcji  $\circ$  jest działaniem wewnętrznym w zbiorze  $V = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ , tzn. zbudować tabelkę dla tego działania oraz sprawdzić, czy struktura algebraiczna  $\{V, \circ\}$  jest grupą.

**7.5.** Proszę wykazać, że  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3$  i  $\forall t, t' \in \mathbb{R}$  zbiór transformacji

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} - \mathbf{v}t, \\ t' &= t \end{aligned}$$

jest grupą, jeżeli działaniem grupowym jest składanie przekształceń. Taka transformacja współrzędnych i czasu jest znana w fizyce jako tzw. *szczególna grupa Galileusza*.

- 7.6. Proszę znaleźć postać wyrażenia  $f(x) = ax^2 + 2bxy + cy^2$  po zmianie zmiennej  $x \rightarrow x + ky$ , a następnie pokazać, że wyznacznik jest niezmiennikiem tego przekształcenia.

**Wskazówka:**

Funkcja  $f(x)$  jest niezmiennicza względem przekształcenia  $\hat{U}$  jej argumentu, jeżeli po przekształceniu argumentu wartość funkcji nie ulegnie zmianie, tzn.

$$f(x) = f(\hat{U}x).$$

- 7.7. Proszę zapisać tabelę działania dla grupy symetrii prostokąta, przyjmując, że  $\alpha, \beta, \gamma$  są obrotami wokół odpowiednich osi, jak to przedstawiono na rysunku.

**Wskazówka:**

Zastosuj permutacje do wierzchołków prostokąta.

