20. 12. 2019

Matematyczne Metody Fizyki I
grupy: fizyka medyczna oraz mikro i nanotechnologie w biofizyce

Zestaw 8

8.1. Dana jest macierz

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2+3i & 1-i & 5i \\ 1+i & 6-i & 1+3i \\ 5-6i & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Proszę rozłożyć macierz $\hat{\mathbf{A}}$ na składową hermitowską i antyhermitowską.

8.2. Proszę sprawdzić, dla jakich wartości x macierz

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 4 & x+2 \\ 2x-3 & x+1 \end{bmatrix}$$

jest symetryczna?

8.3. Proszę obliczyć wartość wielomianu

$$f\big(\hat{\mathbf{X}}\big) = \hat{\mathbf{X}}^3 - 2\hat{\mathbf{X}}^2 + \hat{\mathbf{I}},$$

gdzie $\hat{\mathbf{I}}$ jest macierzą jednostkową, natomiast macierz $\hat{\mathbf{X}}$ ma postać

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.4. Proszę wykazać, że jeżeli $\hat{\mathbf{A}} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ i spełnione jest równanie

$$\hat{\mathbf{A}}^2 + \hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{0}},$$

to istnieje macierz odwrotna. Jaka jest postać tej macierzy?

8.5. Proszę znaleźć macierz odwrotną do macierzy

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

stosując metodę operacji elementarnych.

8.6. Proszę rozwiązać równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & 9 \\ 7 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

8.7. Proszę obliczyć wyznacznik macierzy

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

stosując metodę:

a) permutacyjną,

b) Laplace'a.

8.8. Proszę znaleźć miejsca zerowe wielomianu

$$f(x) = \det \begin{bmatrix} x-2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix}.$$

8.9. Proszę znaleźć macierz odwrotną do macierzy:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

metodą dopełnień algebraicznych.

8.10. Proszę pokazać, że

a) $(\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}})(\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}) = \hat{\mathbf{A}}^2 - \hat{\mathbf{B}}^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}] = \hat{\mathbf{0}}$,

b) $[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}^{-1}] = -\hat{\mathbf{B}}^{-1}[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]\hat{\mathbf{B}}^{-1}$, zakładając, że $\det \hat{\mathbf{B}} \neq 0$,

b) $\hat{\mathbf{B}} = \left(\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}\right)^{-1}$, jeżeli wiadomo, że $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{I}}$.

8.11. Spinowe macierze Pauliego mają postać:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Proszę pokazać, że

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i^2 = \hat{\mathbf{I}}, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i\hat{\boldsymbol{\sigma}}_j = i\epsilon_{ijk}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_k, \quad \{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j\} = 2\boldsymbol{\delta}_{ij},$$

gdzie ϵ_{ijk} jest symbolem Levi-Civity, natomiast $\boldsymbol{\delta}_{ij}$ jest symbolem Kroneckera.

B. Spisak, P. Wójcik, D. Woźniak