

Matematyczne Metody Fizyki I
grupa: fizyka medyczna

Zestaw 10

10.1. Proszę sprawdzić, które z podanych przekształceń: $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest liniowe

- a) $(x, y) \rightarrow (x + 2y, x - y, x)$,
- b) $(x, y) \rightarrow (2x - y, x + 1, y - 1)$,
- c) $(x, y, z) \rightarrow (xy, x, y)$.

10.2. Proszę wyznaczyć jądro i obraz przekształcenia liniowego $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

- a) $(x_1, x_2) \rightarrow (2x_1 - x_2, -6x_1 + 3x_2)$,
- b) $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1 - 2x_2 + 3x_3, x_1 - 2x_2 + 3x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,
- c) $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_1)$.

10.3. Proszę wyznaczyć macierz przekształcenia liniowego $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ określonego wzorem:

- a) $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (4x_1 + 5x_2 + 6x_3, x_1 + 7x_2 + 8x_3)$,
- b) $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1 + x_3, 9x_1 - 2x_2)$.

w bazach kanonicznych.

10.4. Przekształcenie liniowe $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest określone wzorem $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2 - x_3)$. Proszę wyznaczyć macierz tego przekształcenia liniowego w bazach \mathcal{B} i \mathcal{B}' .

Baza \mathcal{B} składa się z wektorów: $\{(2, -1, 0), (1, 3, 2), (0, 4, 1)\}$, natomiast baza \mathcal{B}' z wektorów $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

10.5. Proszę znaleźć macierz przejścia od bazy \mathcal{B} do bazy \mathcal{B}' , jeżeli baza \mathcal{B} składa się z wektorów $\{(1, 2, 3), (1, 3, 4), (1, 5, 7)\}$, a baza \mathcal{B}' $\{(2, 3, 4), (4, 4, 5), (6, 3, 4)\}$.

10.6. Proszę wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy przekształcenia liniowego

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

10.7. Proszę znaleźć macierz podobną do macierzy

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

10.8. Proszę wyznaczyć macierz formy kwadratowej

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$$

10.9. Proszę zbadać określoność formy kwadratowej

a) $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3,$

b) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3,$

stosując kryterium Sylwestera.

10.10. Proszę znaleźć postać kanoniczną formy kwadratowej

a) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 21x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3,$

b) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3,$

stosując metodę Lagrange'a.

10.11. Proszę sprawdzić, czy forma $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

a) $\varphi[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2,$

b) $\varphi[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = 3x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2.$

jest iloczynem skalarnym w przestrzeni \mathbb{R}^2 .

Bartłomiej Spisak