

## Matematyczne Metody Fizyki I grupa: fizyka medyczna

### Zestaw 6

- 6.1.** Liczby zespolone  $z_1 = x_1 + iy_1$  i  $z_2 = x_2 + iy_2$  mogą być reprezentowane przez dwuwymiarowe wektory w postaci  $\mathbf{z}_1 = x_1\mathbf{e}_x + y_1\mathbf{e}_y$  i  $\mathbf{z}_2 = x_2\mathbf{e}_x + y_2\mathbf{e}_y$ . Proszę pokazać, że

$$z_1^* z_2 = \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 + i(\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2) \cdot \mathbf{e}_z,$$

gdzie  $\mathbf{e}_i$  jest wersorem w  $i$ -tym kierunku, dla  $i = x, y, z$ .

- 6.2.** Proszę narysować zbiory liczbowe spełniające warunki:

- a)  $\arg \{z\} = \pi/4$ ,
- b)  $\pi/6 < \arg \{z + 3i\} < \pi/3$ ,
- c)  $\pi/2 \leq \arg \{(-1 + i)z^3\} \leq \pi$ ,
- d)  $\arg \{i/z\} = 3\pi/4$ .

- 6.3.** Proszę obliczyć argumenty główne dla następujących liczb zespolonych:  $z = 2$ ,  $z = i$ ,  $z = 5 + 5i$ ,  $z = -1 + i$ ,  $z = 3 - 3i$ ,  $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ , a następnie zapisać je w postaci trygonometrycznej i wykładniczej.

- 6.4.** Proszę wyznaczyć część rzeczywistą i część urojoną funkcji  $\sin z$  oraz  $\cos z$ , a następnie sprawdzić dla jakiej wartości  $z = x + iy$ , funkcja  $\sin z = 10$ .

- 6.5.** Proszę wykazać, że

$$\left( \frac{1 + itg x}{1 - itg x} \right)^n = \frac{1 + itg nx}{1 - itg nx}.$$

- 6.6.** Proszę zapisać wyrażenia  $(1 - \sqrt{3}i)^{2013}$  oraz  $\frac{(-\sqrt{3}+i)^5}{(1-i)^2}$  w postaci algebraicznej.

- 6.7.** Proszę obliczyć i narysować podane pierwiastki:  $\sqrt{-2i}$ ,  $\sqrt[3]{1 + \sqrt{3}i}$ ,  $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$ .

- 6.8.** Proszę wykazać następujące tożsamości:

- a)  $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$ ,
- b\*)  $\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$ .

**6.9.** Równanie fali świetlnej o częstości kołowej  $\omega$  ma postać

$$\psi(x, t) = A \exp[-i\omega(t - x/v)],$$

gdzie  $A$  jest amplitudą fali,  $v = c/n$  jest prędkością rozchodzenia się światła w ośrodku o współczynniku załamania  $n$ , a  $c$  jest prędkością światła w próżni. Dla niektórych materiałów współczynnik załamania światła można przedstawić w postaci zespolonej, tzn.  $n = \alpha + i\beta$ . Jaki to ma sens fizyczny?

*Bartłomiej Spisak*