

Matematyczne Metody Fizyki I
grupa: fizyka medyczna

Zestaw 8

8.1. Dana jest macierz

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 + 3i & 1 - i & 5i \\ 1 + i & 6 - i & 1 + 3i \\ 5 - 6i & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Proszę rozłożyć macierz $\hat{\mathbf{A}}$ na składową hermitowską i antyhermitowską.

8.2. Proszę sprawdzić, dla jakich wartości x macierz

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 4 & x + 2 \\ 2x - 3 & x + 1 \end{bmatrix}$$

jest symetryczna?

8.3. Proszę obliczyć wartość wielomianu

$$f(\hat{\mathbf{X}}) = \hat{\mathbf{X}}^3 - 2\hat{\mathbf{X}}^2 + \hat{\mathbf{I}},$$

gdzie $\hat{\mathbf{I}}$ jest macierzą jednostkową, natomiast macierz $\hat{\mathbf{X}}$ ma postać

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.4. Proszę wykazać, że jeżeli $\hat{\mathbf{A}} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ i spełnione jest równanie

$$\hat{\mathbf{A}}^2 + \hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{O}},$$

to istnieje macierz odwrotna. Jaka jest postać tej macierzy?

8.5. Proszę znaleźć macierz odwrotną do macierzy

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

stosując metodę operacji elementarnych.

8.6. Proszę rozwiązać równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & 9 \\ 7 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

8.7. Proszę obliczyć wyznacznik macierzy

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

stosując metodę:

- a) permutacyjną,
- b) Laplace'a.

8.8. Proszę znaleźć miejsca zerowe wielomianu

$$f(x) = \det \begin{bmatrix} x-2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix}.$$

8.9. Proszę znaleźć macierz odwrotną do macierzy:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

metodą dopełnień algebraicznych.

8.10. Proszę pokazać, że

- a) $(\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}})(\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}) = \hat{\mathbf{A}}^2 - \hat{\mathbf{B}}^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}] = \hat{\mathbf{0}}$,
- b) $[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}^{-1}] = -\hat{\mathbf{B}}^{-1}[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]\hat{\mathbf{B}}^{-1}$, zakładając, że $\det \hat{\mathbf{B}} \neq 0$,
- b) $\hat{\mathbf{B}} = (\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}})^{-1}$, jeżeli wiadomo, że $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{I}}$.

8.11. Spinowe macierze Pauliego mają postać:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Proszę pokazać, że

$$\hat{\sigma}_i^2 = \hat{\mathbf{I}}, \quad \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j = i \epsilon_{ijk} \hat{\sigma}_k, \quad \{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j\} = 2 \delta_{ij},$$

gdzie ϵ_{ijk} jest symbolem Levi-Civity, natomiast δ_{ij} jest symbolem Kroneckera.