26. 03. 2014

Matematyczne metody fizyki II

Zestaw 2

2.0 Proszę sprawdzić, czy funkcje:

a) $f(z) = \sin z$,

b) $f(z) = e^z$,

c) $f(z) = z^2$,

d) $f(z) = z^{-1}$,

e) $f(z) = zz^*$,

są analityczne.

2.1 Proszę wykazać, że dla funkcji analitycznej $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, jej część rzeczywista i część urojona spełniają dwuwymiarowe równanie Laplace'a.

2.2 Proszę:

a) wyznaczyć wszystkie wartości stałych a, b, c, d, dla których wielomian $u(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ jest harmoniczny, tzn. spełnia dwuwymiarowe równanie Laplace'a w całej płaszczyźnie,

b) znaleźć $v(x,y)$ harmoniczną funkcję stowarzyszoną do $u(x,y)$,

c) znaleźć funkcję analityczną $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, gdzie $z = x + iy$.

2.3 Proszę pokazać, że:

$$\int_{C_1} dz\ z^* = -i\pi,$$

gdzie C_1 jest półokręgiem od -1 do 1,
natomiast, gdy C_2 jest krzywą łamaną o wierzchołkach: $(-1,0)$, $(-1,i)$, $(1,i)$, $(1,0)$, to

$$\int_{C_2} dz\ z^* = -i4.$$

Oba kontury są skierowane zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

2.4 Proszę obliczyć wartość całki:

$$\int_C dz\, z^2,$$

gdzie C jest jednostkowym kwadratem o wierzchołkach: $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ na plaszczyznie zespolonej.

2.5 Proszę pokazać, że

$$\left|\int_C dz\ \frac{\ln z}{z^2}\right| \leq 2\pi\frac{\pi + \ln R}{R},$$

gdzie C jest okręgiem $|z| = R$, przy czym $R > 1$.
Ile wynosi wartość tej całki, gdy $R \longrightarrow \infty$?

Bartłomiej Spisak