26. 04. 2014

Matematyczne metody fizyki II

Zestaw 3

3.0 Proszę obliczyć całki Fresnela

$$\int_0^\infty dx\ \cos x^2 \quad \text{oraz} \quad \int_0^\infty dx\ \sin x^2,$$

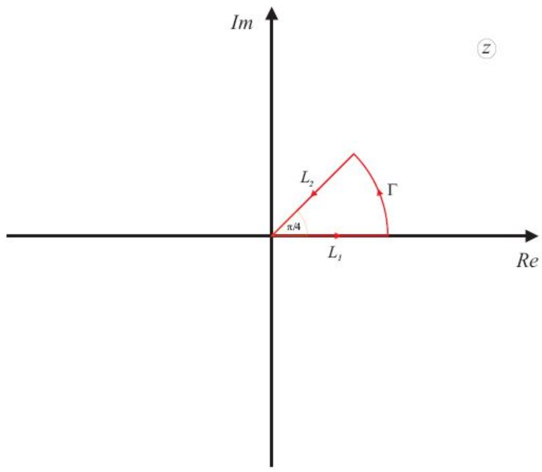
wykorzystując *całkę Poissona*, tzn.

$$\int_0^\infty dx\ e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

Wskazówka:
W celu obliczenia całek Fresnela, wprowadzić funkcję pomocniczą

$$f(z) = e^{iz^2},$$

oraz przyjąć kontur całkowania, taki jak przedstawiono na rys. 1



Rysunek 1: Kontur całkowania $C = L_1 \cup \Gamma \cup L_2$.

3.1 Proszę rozwinąć funkcję

$$f(z) = \frac{7z-2}{z(z+1)(z-2)}$$

w szereg Laurenta wokół punktu $z_0 = -1$ w pierścieniu $1 < |z+1| < 3$.

3.2 Proszę obliczyć całki

a) $I = \int_C dz \frac{\sin z}{z^2+1}$, gdzie $C = K(0, 2)$,

b) $I = \int_C dz \frac{\exp[z]}{(z+2)^4}$, gdzie C – kontur zawierający we wnętrzu punkt $z = (-2, 0)$,

c) $\int_C dz \frac{1}{(z^2+1)^2}$, gdzie $C = \{z \in \mathbb{C} : \quad |z - i| = 1\}$,

korzystając ze wzoru całkowego Cauchy'ego.

3.3 Proszę określić rodzaj osobliwości w skończonych punktach osobliwych oraz w nieskończoności następujących funkcji

a) $f(z) = [z - z^3]^{-1}$,

b) $f(z) = z^5[1 - z]^{-2}$,

c) $f(z) = \exp[z][1 + z^2]^{-1}$,

d) $f(z) = \exp[z/(1 - z)]$.

3.4 Proszę wyznaczyć residua funkcji

a) $f(z) = \exp[z][z(z - 1)]^{-1}$,

b) $f(z) = \exp[\pi z][1 + z^2]^{-1}$.

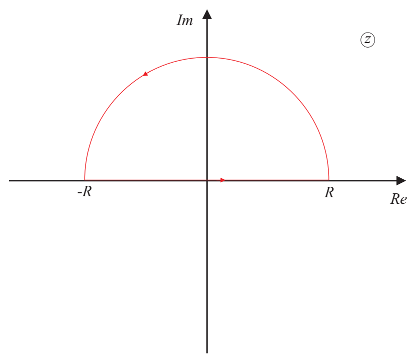
3.5 Proszę obliczyć następujące całki, stosując twierdzenie o residuach.

a)
$$\int_0^\infty dx\, \frac{x^2+1}{x^4+1}.$$

b)
$$\int_0^\infty dx\, \frac{x\sin x}{x^2+a^2},$$

gdzie $a > 0$.

Kontur całkowania jest przedstawiony na rys. 2.



Rysunek 2: Kontur całkowania: $\Gamma \cup L$.

Proszę uzasadnić wybór tego konturu!

Bartłomiej Spisak