09. 05. 2014

Matematyczne metody fizyki II

Zestaw 4

4.0 Proszę wykazać, że

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Wskazówka:
Rozważyć prawą stronę tej równości, a następnie użyć przedstawienia całkowego dla obu funkcji Γ.

4.1 Proszę udowodnić, że wartość całki Poissona jest równa $\Gamma(1/2)$.

4.2 Proszę przedstawić całkę niewłaściwą

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} dx\, e^{-x^\alpha}, \quad \text{gdzie } \alpha > 0$$

za pomoca funkcji $\Gamma(x)$

4.3 Proszę pokazać, że

$$\left| \left(-\frac{1}{2} + iy \right)! \right|^2 = \frac{\pi}{\cosh \pi y}.$$

4.4 Proszę obliczyć wartości całek

a) $I = \displaystyle\int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$,

b) $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} d\theta (\mathrm{tg}\,^3\theta + \mathrm{tg}\,^5\theta) e^{-\mathrm{tg}\,^2\theta}$,

c) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} dx \frac{1}{(1+x^3)^4}$,

d) $I_p = \displaystyle\int_0^{\pi/2} d\theta\, \mathrm{tg}\,^p\theta$

opierając się na *odpowiednich* funkcjach Eulera.

4.5 Niech $\psi(r,\vartheta)$ jest funkcją falową cząstki rozpraszanej na potencjale Coulombowskim. W początku układu współrzędnych można tę funkcję wyrazić wzorem

$$\psi(0) = e^{-\pi\gamma/2}\Gamma(1+i\gamma),$$

gdzie $\gamma = Z_1 Z_2 e^2/\hbar v$. Proszę pokazać, że

$$|\psi(0)|^2 = \frac{2\pi\gamma}{e^{2\pi\gamma}-1}.$$

Bartłomiej Spisak