

Matematyczne metody fizyki II

Zestaw 5

5.0 Proszę wyznaczyć i sklasyfikować punkty osobliwe równań:

a) $x(x-1)y''(x) + (x+1)y'(x) + xy(x) = 0$,

b) $(1+x^2)y''(x) + xy'(x) - (x-1)y(x) = 0$.

Należy uwzględnić także $x = \infty$!

5.1 Czy równanie

$$x^2y''(x) + (3x+1)y(x) = 0$$

posiada rozwiązanie w postaci szeregu potęgowego w otoczeniu punktu $x_0 = 0$?

5.2 Proszę znaleźć ogólne rozwiązanie równania Legendre'a

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \alpha(\alpha+1)y(x) = 0,$$

metodą szeregów potęgowych w otoczeniu punktu $x = 0$. Jaki jest promień zbieżności rozwiązań w postaci szeregu potęgowego dla równania Legendre'a wokół $x = 0$?

5.3 Proszę rozwiązać równanie

$$x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0,$$

w otoczeniu punktu $x = 0$, stosując metodę Frobeniusa.

5.4 Proszę znaleźć metodą Wrońskianu pierwsze trzy wyrazy drugiego rozwiązania równania Bessela dla $n = 0$:

$$x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0,$$

przyjmując, że

$$J_0(x) \approx 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}.$$

Wskazówka:

Zastosować rozwinięcie w szereg dwumianowy, tzn.

$$\begin{aligned} (1 \pm \xi)^{-m} &= 1 \mp m\xi + \frac{m(m+1)}{2!}\xi^2 \mp \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\xi^3 \\ &+ \dots + (\mp 1)^n \frac{m(m+1)\dots(m+n-1)}{n!}\xi^n, \end{aligned}$$

gdzie $m > 0$.